3. 連続関数の性質と逆関数

2020/5/13

● 関数の連続性（復習）

<u>定義</u>　D を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ が **連続関数**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in D$ に対し

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

「すべての」または「任意の」という意味

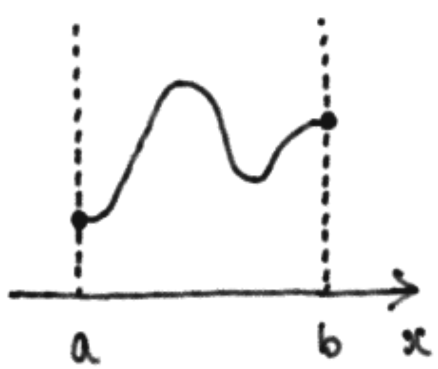
ただし，f が a のまわり全体で定義されていないときは，

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = f(a)$$

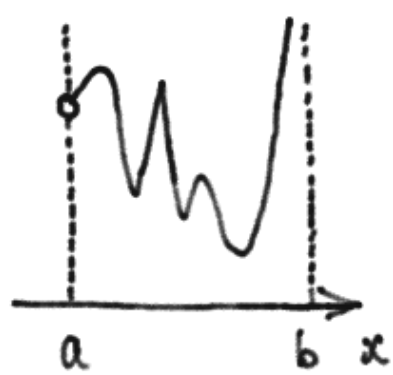
であればよい．

● 一変数連続関数の性質

一変数連続関数はたとえば次のようなグラフをもつ．



$[a,b]$ 上連続



(a,b) 上連続

定理 3.1（中間値の定理）

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続関数, $f(a) < f(b)$

$\Longrightarrow$ $f(a) < l < f(b)$ をみたす $\forall l$ に対して

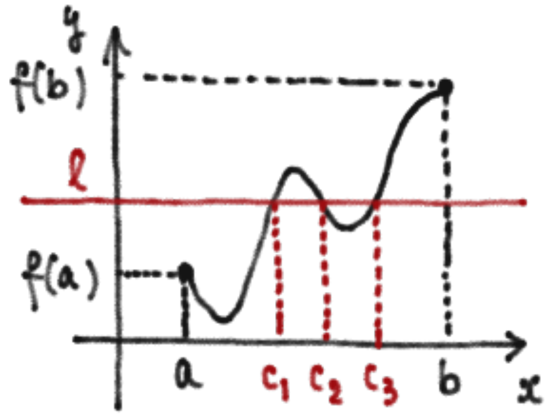
$\exists c \in (a, b)$ s.t. $f(c) = l$.

such that

「存在」を表す記号.

∃○○ s.t. △△ は

「△△をみたす○○が存在する」



cは複数あることもある

注 $f(a) > f(b)$ でも同様.

定理 3.2（最大・最小値の存在定理）

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続関数

$\Longrightarrow$ f は $[a, b]$ において最大値・最小値をとる.

定理3.1, 定理3.2 は次の二つの事柄の帰結である.

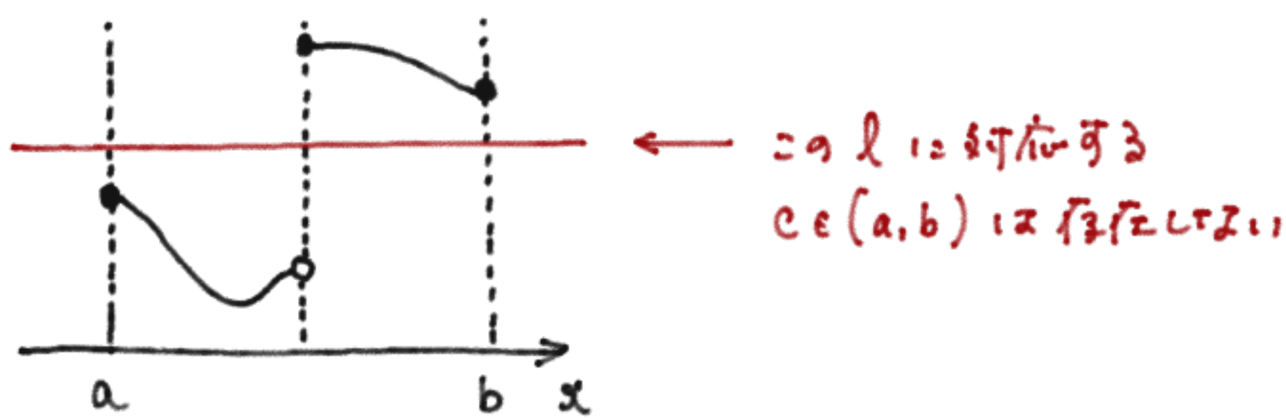
- 考えている関数 f が連続性 (continuity) をもつこと
- 考えている数体系 $\mathbb{R}$ が連続性 (completeness) をもつこと

中間値の定理と実数の連続性

関数 f の連続性を仮定しなかったらどうなるか？

$\mathbb{R}$ という「連続性」をもつ数体系を使わなければどうなるか？

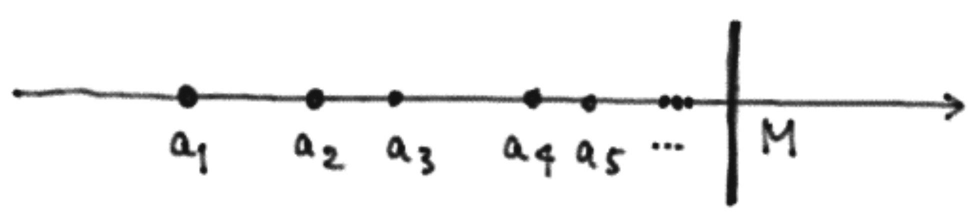
連続でない関数（のグラフ）の例：



事実 3.3（実数の連続性）

単調増加かつ上に有界な数列は，ある実数に収束する．

注 「上に有界」とは，$a_n \leqq M$ （$\forall n$ について）をみたす M が存在すること．

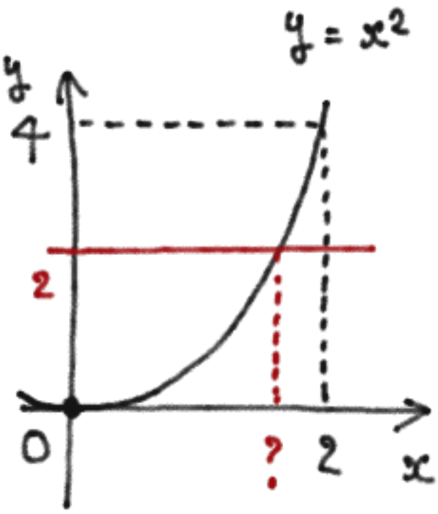


例 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …

（第n項は $\frac{1}{10^n}$ の整数倍で2乗が2を超えないような最大のもの）

は実数の範囲では収束する. 有理数の範囲では収束しない!

たとえば有理数（その全体を $\mathbb{Q}$ で表す）の範囲では中間値の定理は成り立たない.



$f: [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$,
$f(x) = x^2$

を考えると, $f(c) = 2$ となる $c \in (0,2) \cap \mathbb{Q}$ は存在しない!

実数の連続性を用いた中間値の定理の証明については教科書4.1節を読むこと.

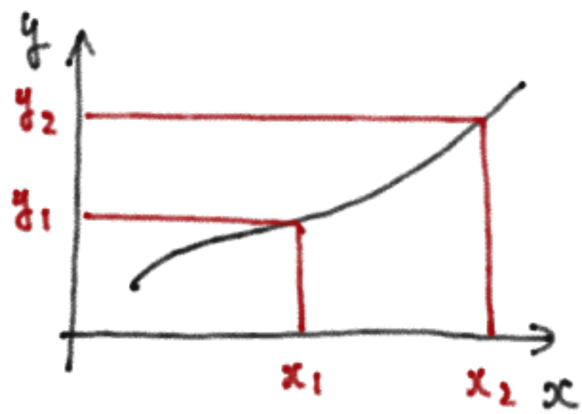
中間値の定理と逆関数

$I \subset \mathbb{R}$　関数 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ を考える．

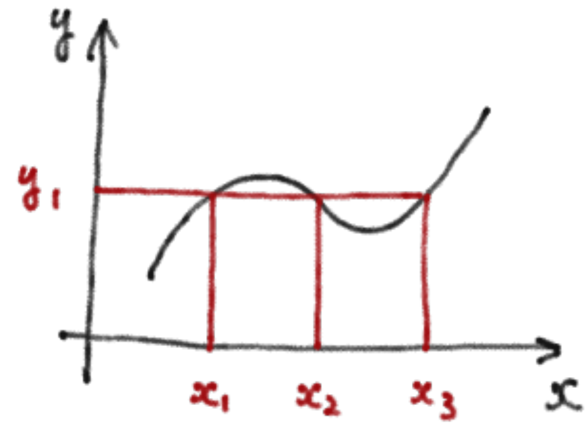
逆関数が定義されるためには

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad (3.1)$$

でなければならない．



OK



これは困る

__定義__

関数 $f: I \to \mathbb{R}$ が __1対1__（または __単射__）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x_1, x_2 \in I$ に対し (3.1) が成立．

このとき f の __逆関数__ f^{-1} を

$$f^{-1}(y) = (\, f(x) = y \text{ をみたす } x \,)$$

で定める．f^{-1} の定義域は f の値域に一致．

定理 3.4

$f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ が連続かつ真に単調増加

$\Longrightarrow$ f は 1 対 1.

逆関数 f^{-1} は $[f(a),f(b)]$ で定義され，

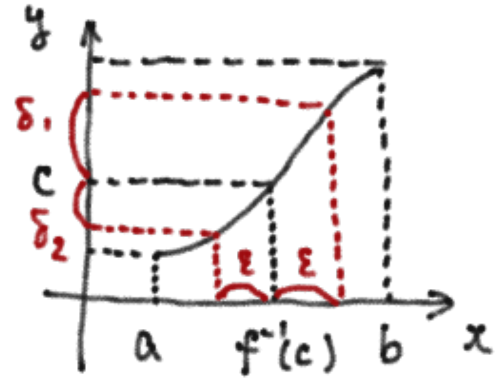
f^{-1} も連続かつ真に単調増加.

［証明］ f が 1 対 1 であること，f^{-1} が真に単調増加であることは教科書参照.

f^{-1} が $[f(a),f(b)]$ で定義されること. f の単調増加性から $a\leqq x\leqq b$ のとき $f(x)\in[f(a),f(b)]$.
また逆に，$l\in[f(a),f(b)]$ ならば中間値の定理より $f(x)=l$ となる $x\in[a,b]$ が存在する. ゆえに f の値域は $[f(a),f(b)]$ である.

f^{-1} の連続性（概略）. c を $[f(a),f(b)]$ の点とし，

$\forall\varepsilon>0$ をとる. ここでは右図のような単純な状況だけを扱う.



$$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$$

とおけばたしかに

$$|y-c|<\delta \Longrightarrow c-\delta_2<y<c+\delta_1$$
$$\Longrightarrow |f^{-1}(y)-f^{-1}(c)|<\varepsilon.$$

□

逆関数の例

<u>例1</u>. $f(x)=e^x$, $g(x)=\log x$.

$a<b$ をみたす任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^x$$

の逆関数

$$f^{-1} : [e^a, e^b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

をつくることができる。ここで a を小さく，b を大きくして f^{-1} の定義域を広げていけば

$$f^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

を定義できることがわかる。これを log で表す。

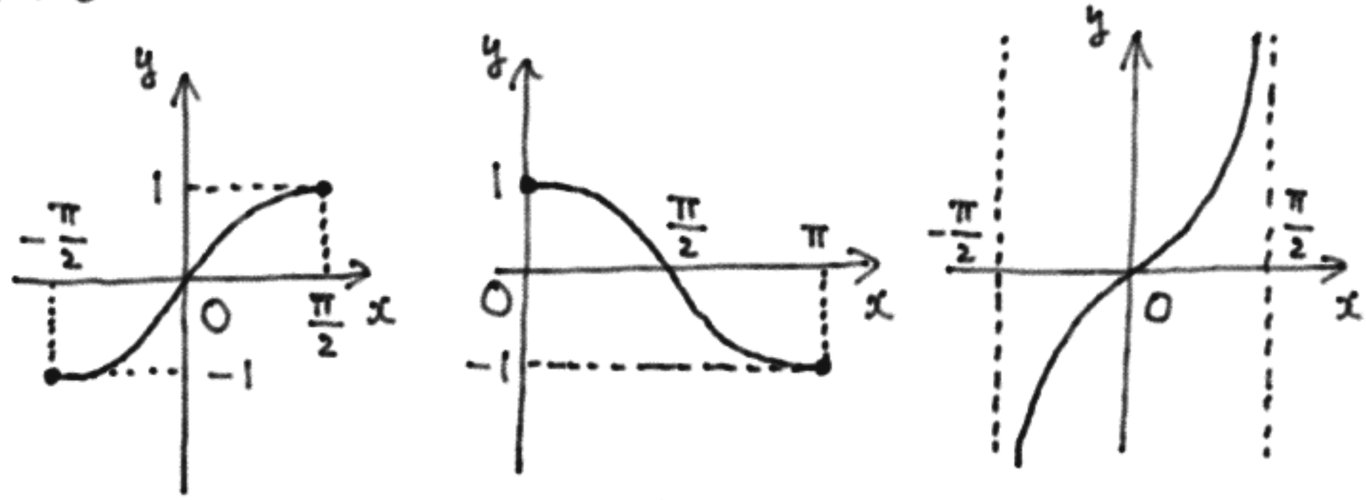
よく知られているように

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

だが，逆にこれを $\log x$ の定義とみなし，その逆関数として e^x を定義することもできる。

例2. 逆三角関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$, $\mathrm{Cos}^{-1}x$, $\mathrm{Tan}^{-1}x$

sin, cos, tan の定義域を次のように制限したものを Sin, Cos, Tan とする.



$y = \mathrm{Sin}\,x$　　$y = \mathrm{Cos}\,x$　　$y = \mathrm{Tan}\,x$

これらの逆関数を Sin^{-1}, Cos^{-1}, Tan^{-1} と書く.

逆に,

$$\mathrm{Sin}^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

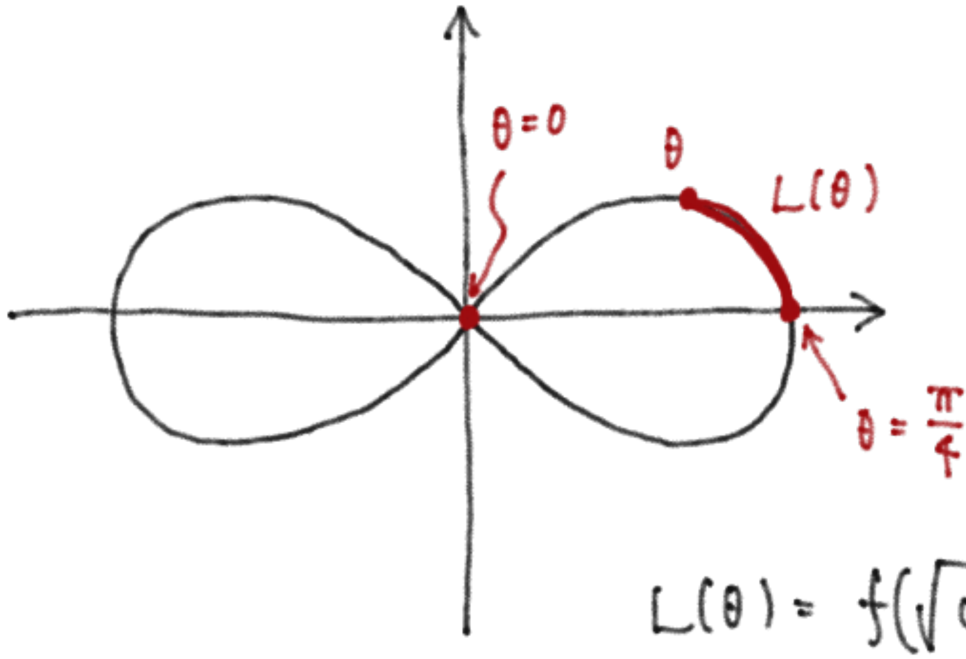
を $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の定義とみなして, その逆関数として Sin を定義する方法もある.

例3. (ガウスのレムニスケート関数)

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

とおき, その逆関数を sinlemn とか sl と書く.

$f(x)$ は極座標で $r^2 = \cos 2\theta$ で定義される曲線（レムニスケート）の弧長を表している。



$$L(\theta) = f\left(\sqrt{\cos 2\theta}\right)$$