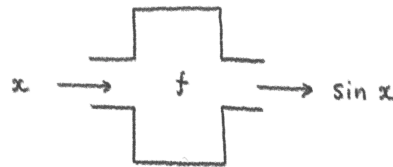


2 関数の極限と連続性

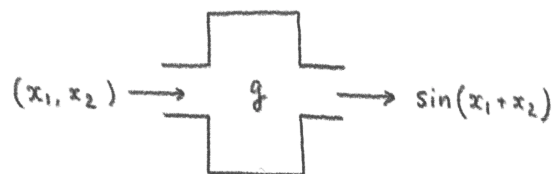
今回は、微積分の主役である関数について、極限や連続性の概念を振り返り、精密なものにしていきます。この講義ではできるだけ「多変数も一変数と同じ」という立場を強調したいので、ちょっと気合いを入れて、多変数関数の場合も扱うことにしたいと思います。

❖ 関数とは何か

みなさん高校でもそのように習っていると思うのですが、関数というのは数の対応のことで、たとえば $f(x) = \sin x$ であれば、「 x という数が入力されたら $\sin x$ という数を出力する」という対応ないしはたらきこそが関数 (function) であり、その対応をここでは f と書いています。したがって、 $f(t) = \sin t$ と書いても意味はまったく変わりません。対応こそが関数だということを模式的に表すために、次のような絵を描く人もいます。



$g(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$ という 2 変数関数 g は、「 (x_1, x_2) という数の組が入力されたら $\sin(x_1 + x_2)$ という数を出力する」対応です。多変数関数とは、「数の組」を入力として受け取るような関数だといえます。



関数 f, g がどういうタイプの入力や出力をもつか示すために、コロン (:) と矢印を使って

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

のようにかくことがあります。 \mathbb{R} は実数 (real numbers) 全体の集合で、手書きでは右のようにかきます。また上では、2 個の実数の組 (x_1, x_2) 全体の集合を \mathbb{R}^2 で表しています (同様に、 n 個の実数の組全体の集合は \mathbb{R}^n で表されます)。

\mathbb{R}

これと似た表記に、値の対応の仕方を示す

$$f: x \mapsto \sin x, \quad g: (x_1, x_2) \mapsto \sin(x_1 + x_2)$$

というものがあります。ですが矢印の形が違うことに注意してください！

関数によっては、入力の範囲を \mathbb{R} 全体とか \mathbb{R}^2 全体とはせず、制限する必要があります。たとえば $h(x) = \log x$ なら、入力 x は正の実数でなければなりません。そのことを、正の実数全体の集合を $(0, \infty)$ とかくことにして $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ と表すことができます。

注 2.1. $(0, \infty)$ というのは実数の区間の一例です。区間については、教科書の p. 20 で確認しておいてください。

以上で述べた関数の概念の一般化として、「写像」というシンプルな概念を導入しておきましょう。これは線形代数でも使う言葉ですし、いま説明しておくのがよいと思います。

定義 2.2. 集合 A から集合 B への**写像** (mapping) とは、 A の各々の元^{げん}*がとして与えられたとき、 B の元を出力する[†]ような対応のことをいう。 A を**定義域**といい、 B を**終域**という。 f が A から B への写像であることを、 $f: A \rightarrow B$ という記号で表す。

写像という言葉を用いれば、写像のうちで終域が数の集合であるようなものが関数だといえます。さらに、定義域が \mathbb{R}^n (またはその部分集合) であるような関数が n 変数関数です。

関数 (または一般に写像) f について、 $f(x)$ のとりうる値全部の集合のことを f の**値域**といいます。 f の値域は終域の部分集合であり、しばしば真部分集合になります。たとえば、 $f(x) = \sin x$ で定義される関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の値域は、閉区間 $[-1, 1]$ です。

❖ 一変数関数の極限

さて、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2.1)$$

という極限があったことを思い出しましょう。これは「 x が 0 に限りなく近づくとき、 $(\sin x)/x$ が 1 に限りなく近づく」ことを意味します。

関数の極限も、数列の極限のときと同様、近似の言葉で表すことで、より精密な概念になります。いまの場合は、まず $(\sin x)/x$ が、 x が 0 に近いとき、1 の近似値とみなされると考えられます。そして、どれだけ精度のよい誤差評価が要求されたとしても、 x が十分に 0 に近ければその誤差評価がみたされているというのが、式 (2.1) の示す状況です。

たとえば

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 0.05$$

という誤差評価が要求されたとしてみましょう。右上の表からわかるように、この誤差評価

x	$(\sin x)/x$
-1	0.841470...
-0.5	0.958851...
-0.1	0.998334...
-0.01	0.9999833334...
0	未定義
0.01	0.9999833334...
0.1	0.998334...
0.5	0.958851...
1	0.841470...

*「要素」のことですが、数学系では「元」という語を好む人が多い。

†「写像」の語にならって、以後、「 A の各々の元を B の元に**写す**」という表現をすることもあります。

は、 $x = 1$ や $x = -1$ では成り立ちませんが、たとえば $|x| < 0.5$ ならば達成されています。つまり

$$|x| < 0.5 \implies \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 0.05 \quad (2.2)$$

です。ちなみに、任意の x について誤差は $x^2/6$ 未満の範囲に収まっているらしいことも表から観察できるでしょう（後で、テイラーの定理の応用として証明します）。

これが関数の極限の精密な定義の考え方です。数列の場合と比べると、見た目は少し違いかもしれませんが、定義の背後にある気分そのものは同じであることがわかんと思います。

一つ注意してほしいのですが、上記の $(\sin x)/x$ についてそうだったように、「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束する」かどうか考える際、 $f(a)$ は未定義であってもかまいません。その場合、(2.2) に相当する式の成立は、 $x = a$ 以外の x について要求されます。そのことにも気をつけながら私たちの定義を一般的にかくと、次のようになります。これをよく「 ϵ - δ ^{イプシロン・デルタ} 論法による関数の収束の定義」といいます。

定義 2.3. a を実定数とし、 $x = a$ のまわりで定義された関数 f を考える（ただし、 $f(a)$ は未定義でもよい）。 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が**収束する**とは、ある実数 A があって、どんな正の実数 ϵ に対しても、ある正の実数 δ をとれば、

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon \quad (2.3)$$

が成り立つことをいう。

注 2.4. 教科書 p. 22 には「1 点 $x = a$ が $f(x)$ の定義域に入っていないこともある。このとき『 $x \rightarrow a$ 』は『 $x \neq a$ かつ $x \rightarrow a$ 』と解釈するのがならわしである」という記述がありますが、これは実は流儀が 2 種類に分かれる箇所です。個人的には「 $x = a$ が $f(x)$ の定義域に入っていない場合でも『 $x \rightarrow a$ 』は『 $x \neq a$ かつ $x \rightarrow a$ 』と解釈する」のほうが自然だと感じられますが、教科書の流儀もときどき採用されています。決定的な影響をもたらす差ではないので、これに関しては、個人的な好みを抑えて教科書の流儀に従います。

$x \rightarrow \pm\infty$ の場合の収束や、 A が $\pm\infty$ になる場合（ $\pm\infty$ に**発散する**という言葉遣いになるので注意）については、定義 2.3 には含まれていません。別途、定義を述べる必要があります。ですがここでの目的は、精密な定義を網羅することではなく、よくある極限の性質（教科書 p. 23 の公式 3.1 を参照してください）についての議論がどんな定義によって裏づけられるのを知っておくことにあるので、それらの場合の記述は省略することにします。

片側極限については触れた経験が少ないかもしれないので、説明が必要でしょう。関数 f が「 x が $x > a$ をみたまながら a に限りなく近づくと、 $f(x)$ が A に限りなく近づく」という性質をもつとき、 f は $x = a$ において**右極限** A をもつといいます（精密にやるには ϵ - δ 論法を使いますが、それは省略します）。記号は

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A, \quad \lim_{x \searrow a} f(x) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = A$$

などが用いられます。左極限がどんなものかということもわかるでしょう。記号は

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A, \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = A$$

となります。たとえば

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x} = -1$$

が成り立ちます。

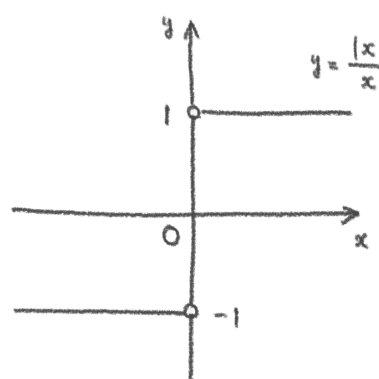
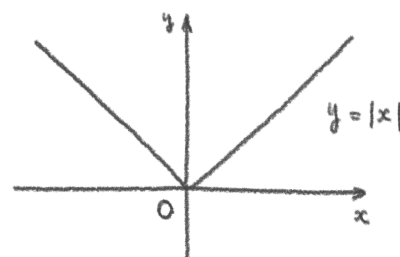
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ であることは、 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ であることと同値です。

注 2.5. なお、「 $x \rightarrow 0+0$ 」, 「 $x \rightarrow 0-0$ 」の場合に限り、それぞれ初めの 0 を省略して「 $x \rightarrow +0$ 」, 「 $x \rightarrow -0$ 」とすることも許されます。つまり、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1$$

としてもいいということです。

それではここで、高校で学んだ初等的な極限について、証明を振り返ってもらいましょう。本資料 p. 14 の例題に取り組んでください。まずは解答を隠して、自分でできるよう努力してみてください。



❖ 多変数関数の極限

ここまでは既知のことの精密化にすぎませんでした。ここから一歩踏み込んで、多変数関数の話をします。

例として

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

という二つの 2 変数関数を考えます（このように、変数を x_1, x_2, \dots ではなく x, y, \dots とすることもよくあります）。そして、数の組 (x, y) が $(0, 0)$ に限りなく近づくときの極限について考察しましょう。

一変数の場合と根本的な違いはないのですが、「数の組 (x, y) が $(0, 0)$ に限りなく近づく」の意味をはっきりさせる必要があるでしょう。これは幾何的（図形的）にとらえて、 xy 平面において点 (x, y) が点 $(0, 0)$ に限りなく近づくという意味だと約束します。つまり、2 点間の距離 $\sqrt{x^2 + y^2}$ が 0 に限りなく近づくということです。

一般的な収束の定義は次のようになります。2 変数関数のときに限って述べますが、 n 変数関数についても同じです。

定義 2.6. $(x, y) = (a, b)$ のまわりで定義された 2 変数関数 f を考える (ただし, $f(a, b)$ は未定義でもよい). 点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近づくとき, $f(x, y)$ がある実数 A に限りなく近づくならば, $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき $f(x, y)$ は A に**収束する**といい,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$$

とかく. もっと精密に言えばこれは, どんな正の実数 ε に対しても, ある正の実数 δ をとれば,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon \quad (2.4)$$

が成り立つという意味である.

式 (2.4) が式 (2.3) より複雑な見た目になってしまいましたが, 次のように書き直すことができます. (x, y) を点ではなくベクトルと解釈してみましょう. 高校まではあまりやらなかったと思いますが, ベクトルを横ではなく縦に成分を並べて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とかくことも多いので, ここでもそうします. すると 2 点間の距離 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ は, 2 つのベクトルの差の長さとして

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|$$

と表すことができます. これを使えば, 式 (2.4) は

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$$

となって, 見た目が式 (2.3) に近づきます. さらに, 数の組, xy 平面の点, ベクトルをすべて同一視してしまい, それらを x や a のような 1 文字 (太字の x , a . 手書きでは右のようにかくことが多い) で表してしまえば

x

a

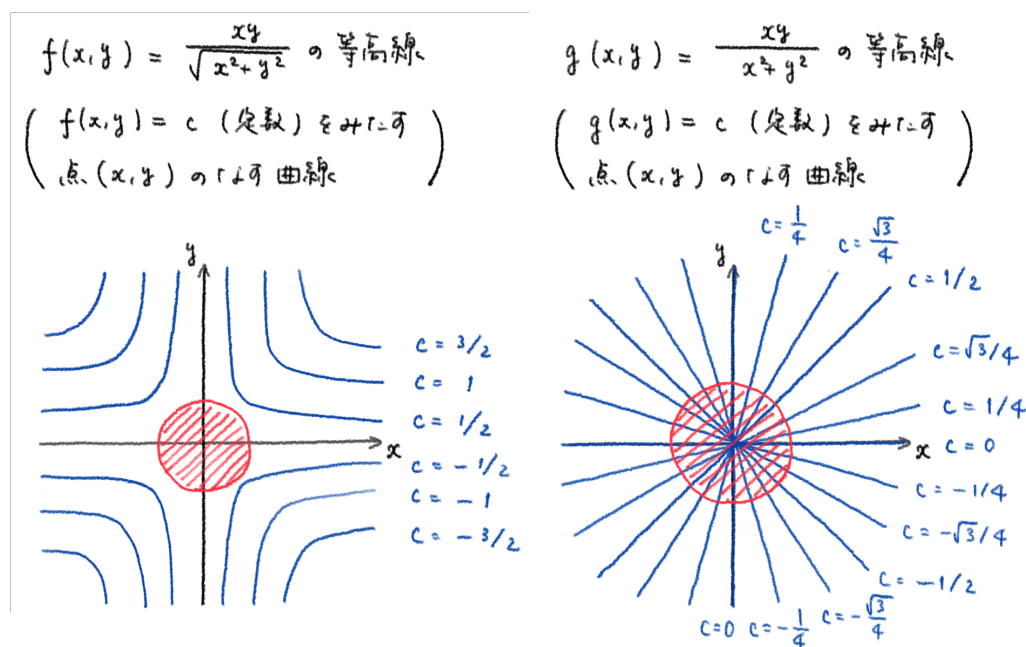
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

となって, これはもはや式 (2.3) と同じといってもいいでしょう. むしろ, 式 (2.3) でも \Rightarrow の左側の $|x - a|$ は数直線上における 2 点 x , a の距離だと考えてもよいですね. 絶対値を距離とみなすこの見方は, 高校でも, 複素数の絶対値について学ぶときに出会ったのではないかと思います.

注 2.7. たったいま行ったように, n 変数関数を扱うときは, 入力 (x_1, x_2, \dots, x_n) を数の組とみなしたり, 点 (n 次元空間の) とみなしたり, ベクトル (n 次元の) とみなすという視点の変更が頻繁に行われます. \mathbb{R}^n は数の組の集合でもあるし, 点の集合 (つまり, 平面, 3 次元空間, 4 次元空間, ……) でもあるし, ベクトルの集合でもあるわけです.

一般論の説明が長くなりましたが、話を戻して、この項の初めにあげた二つの関数を調べます。 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ のときの極限を考察するのです。 グラフを描くのが難しいのですが、前回紹介した Wolfram Alpha で `plot xy/sqrt(x^2+y^2)` などと入力するとき綺麗な図が現れるので、やってみてください (sqrt は square root からきている)。

Wolfram Alpha では xy 平面に等高線を描いたものも出てきますが、それをここに書き写してみます。 各々、中央には原点を中心とする円を描きましたが、これは以下の説明で使います。



上の図を使って、まず、関数 $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ について

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

が成り立つことを説明してみたいと思います。

左図の円が、 $c = \pm 1/2$ に対する等高線で挟まれた領域に入っていることに注意してください。したがって、円内部の点 (x,y) について、 $|f(x,y)| < 1/2$ が成り立つことがわかります。ということは、この円の半径を δ とすれば

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことになります。式 (2.4) の形になっていることを強調するため、あえて不要な「-0」を3箇所にかきました。1/2 という値を別の正定数 ε に変えても、同じように、 $c = \pm\varepsilon$ に対する等高線で挟まれた領域に入るような原点中心の円は描けるでしょう (本当は等高線をきちんと描いてみないといけないけれど)。そのことは、円の半径 δ を適切にとれば

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

が成り立つことを意味します。そして、これこそが、 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ のとき $f(x,y)$ が 0 に近づくことの定義でした (定義 2.6)。

一方で関数 $g(x,y) = xy/(x^2 + y^2)$ については, $(x,y) \rightarrow (0,0)$ のとき $g(x,y)$ はいかなる実数にも収束しません. なぜでしょうか. 図を見ると, 原点を中心とする円をどんなに小さく描いてみても, そこには $g(x,y) = 0$ となる点, $g(x,y) = 1/4$ となる点, $g(x,y) = 1/2$ となる点, $g(x,y) = -\sqrt{3}/4$ となる点, 等々が入ってしまうことがわかります. つまり「点 (x,y) が点 $(0,0)$ に近づくとつれて, $g(x,y)$ がある値に限りなく近づく」という状況が生じておらず, $(x,y) \rightarrow (0,0)$ のとき $g(x,y)$ は収束しないのです.

以上のことは, 式をもっと積極的に用いて説明することもできます. というより, ここまでの説明は等高線の図が与えられたことを前提にしたものですから, 完結した説明になってはいません. これは本資料 p. 15 の例題とします. どのようにすれば図に頼らずに説明できるか, いま, しばらく考えてみてください. 原点を中心とする極座標を使うことにして, $(x,y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおいてみるのが賢い考えです.

❖ 関数の連続性

関数の連続性とは直観的にいえばグラフがつながっているということですが, きちんと述べるには極限の概念が必要となります. 一変数関数と多変数関数の場合をまとめて述べてしましましょう (\mathbb{R}^1 とは \mathbb{R} のことであると考えます).

定義 2.8. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ を, \mathbb{R}^n の部分集合 D において定義された関数とする.

(1) D の点 a に対し, 関数 f が点 a において連続であるとは

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

であることをいう. ただし, f が a のまわり全体で定義されていない場合には, x が D に属するという条件下で $x \rightarrow a$ としたとき $f(x) \rightarrow f(a)$ であればよいものとする.

(2) 関数 f が D 上の連続関数であるとは, f が D の任意の点 a において連続であることをいう.

(1) の但し書きが複雑に見えるかもしれませんが, 一変数の場合に把握していればひとまず十分でしょう. たとえば, f が \mathbb{R} の有界閉区間 $I = [c_1, c_2]$ で定義されているときを考えます. $a \in I$ に対し「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow f(a)$ 」を要求したいのですが, a が c_1 または c_2 のときは「 f は a のまわりで定義されている」という状況になっていません. そこで, $a = c_1$ の場合は

$$\lim_{x \rightarrow c_1+0} f(x) = f(c_1)$$

だけを要求し, また $a = c_2$ の場合は

$$\lim_{x \rightarrow c_2-0} f(x) = f(c_2)$$

だけを要求するというのが, (1) の但し書きが意味する内容です.

関数の連続性の概念は, 現時点では役に立つことがあまり想像できないかもしれませんが. しかし, たとえば与えられた関数の逆関数を考えたいようなとき, 連続性という性質が決定的に重要だということが, 次回明らかになります.

例題 (初等関数に関する極限/教科書 p. 23 公式 3.2)

次を証明してください.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

ただし以下のことを既知としてかまいません. また, 教科書の公式 3.1 にある, 関数の極限に関する一般的な性質も自由に利用してください.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ である.
- $\cos x, \sin x$ は \mathbb{R} 上の連続関数. また $0 < x < \pi/2$ ならば $\sin x < x < \tan x$ である.

解答例

(1), (2) については教科書 p. 24 を参照してください.

(3) $x \rightarrow 0$ のときの極限を問題にしているので, $|x| < \pi/2$ のときの $(\sin x)/x$ について考えれば十分である. また, $(\sin x)/x$ は $x = 0$ では未定義なので, $0 < |x| < \pi/2$ なる x だけを考えればよい.

$0 < x < \pi/2$ ならば $\sin x < x < \tan x$ であり, したがって

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}, \quad \text{ゆえに} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

はさみうちの原理により,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

同様に, $-\pi/2 < x < 0$ ならば $\tan x < x < \sin x$ であることを用いて,

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

であることもわかる. ゆえに $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

例題 (2 変数関数の極限)

次の極限值が存在するか判定し、存在するならばその値を求めてください。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

解答例

(1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおき、 x 軸正の方向からの回転角を θ として $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とする。

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r} = \frac{r \sin 2\theta}{2}$$

だから

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{r}{2}$$

であり、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $r/2 \rightarrow 0$ なので、はさみうちの原理より

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$$

となる。

(2) (1) と同じ記号を使うと

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\sin 2\theta}{2}.$$

これは、点 (x, y) が点 $(0, 0)$ に近づくと、方向によって $g(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ が近づく値が異なることを示している。たとえば、 $\theta = 0$ の方向から $(0, 0)$ に近づくと $g(x, y)$ は 0 に近づく (というより値はずっと 0) が、 $\theta = \pi/4$ の方向から $(0, 0)$ に近づくと $g(x, y)$ は $1/2$ に近づく。したがって、点 (x, y) が点 $(0, 0)$ に近づく際の近づきかたによらず $g(x, y)$ が一定値に近づく状況にはなっておらず、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき $g(x, y)$ は収束しない。

課題 (問 2.1, 問 2.2 については CLE のテスト機能を使って解答してください. 問 2.3 については CLE の掲示板に投稿してください.)

問 2.1 次の関数の値域を求めてください. 空欄には実数または $\pm\infty$ が入ります.

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. 値域は区間 $[\text{ } , \text{ }]$.
- (2) $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ここで $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とは \mathbb{R}^2 から原点 $(0,0)$ だけを除いた集合), $g(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. 値域は区間 $[\text{ } , \text{ }]$.

問 2.2 次の文章の空欄を「 $m > n$ 」, 「 $m = n$ 」, 「 $m < n$ 」のいずれかで埋めてください.

$a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ のとき, 有理関数

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

は十分大きな実数 x について定義される. $x \rightarrow +\infty$ における極限を考えると, m , n の大小に応じて, ならば $f(x) \rightarrow a_m/b_n$, ならば $f(x) \rightarrow 0$, ならば a_m, b_n の符号に応じて $f(x)$ は $\pm\infty$ のどちらかに発散する.

問 2.3 教科書の演習問題の問 3.2, 問 3.3, 問 16.1 を解いてください (各自, 全部解いてください).

また, CLE の掲示板で, 全部で 9 問ある小問のうちから 1 問選んで解答を投稿するか, 他の人が投稿した解答について有益なコメントをしてください.