13. 平面のラプラシアンとその応用

◎ 平面のラプラシアン

今回の話を通じて，D は $\mathbb{R}^2$ の開集合で，$f : D \to \mathbb{R}$ は C^2 級とする．

<u>定義</u> $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ と定める．
Δ を <u>ラプラシアン</u> という．

<u>例</u> $f(x, y) = x^2 + y^2$
$\rightsquigarrow \Delta f(x, y) = 4.$

$f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$
$(D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\})$

$\rightsquigarrow \Delta f(x, y) = 0.$ （<u>調和関数</u>）

$a \in D$ に対して $\Delta f(a)$ とは

「（a のまわりでの値の平均）

－（a における値）」の"正規化"

になっている．より正確には：

<u>定理 13.1</u>　$a \in D$ に対し

$$\frac{4}{r^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + r\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}\right)d\theta - f(a)\right) \longrightarrow \Delta f(a)$$

$$(r \longrightarrow +0)$$

［証明］定理 12.2 を使う．

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) &+ \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\
&+ \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(\boldsymbol{a})(x-a)^2 \\
&\qquad + 2 f_{xy}(\boldsymbol{a})(x-a)(y-b) \\
&\qquad + f_{yy}(\boldsymbol{a})(y-b)^2 \Big) \\
&+ o\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|^2\right) \qquad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}).
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
f\left(\boldsymbol{a} + r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right)
&= f(\boldsymbol{a}) + r \nabla f(\boldsymbol{a}) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
&+ \frac{r^2}{2}\Big(f_{xx}(\boldsymbol{a}) \cos^2\theta \\
&\qquad + 2 f_{xy}(\boldsymbol{a}) \cos\theta \sin\theta \\
&\qquad + f_{yy}(\boldsymbol{a}) \sin^2\theta \Big) + o(r^2) \\
&\qquad (r \to 0).
\end{aligned}
$$

これを積分する．

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta\\ \sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta\end{array}\right\}\ \text{すべて}\ \int_0^{2\pi}\cdots\cdots d\theta = 0.$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \pi.$$

だから

$$\int_0^{2\pi} f\left(a + r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right) d\theta$$

$$= 2\pi f(a) + \frac{r^2}{2}\left(f_{xx}(a)\cdot\pi + f_{yy}(a)\cdot\pi\right)$$

$$+ \boxed{o(r^2)} \quad (r\to 0).$$

前ページの〰〰は

「$r^2 g(r,\theta)$，ただし $\lim_{r\to 0} g(r,\theta) = 0$

（θ によらず一様に）」という形の項．

したがって積分 $r^2\int_0^{2\pi} g(r,\theta)\,d\theta$ も $o(r^2)$．

$$\therefore\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right)d\theta - f(a)$$

$$= \frac{r^2}{4}\Delta f(a) + o(r^2) \quad (r\to 0).$$

$$\therefore\quad \frac{4}{r^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right)d\theta - f(a)\right)$$

$$= \Delta f(a) + \frac{4}{r^2}\, o(r^2)$$

$$\longrightarrow \Delta f(a) \quad (r\longrightarrow 0). \quad \square$$

◎ 熱方程式，波動方程式

Dが一様な物質でできているとし，熱の伝導を考える．時刻 t における点 $(x,y)\in D$ での温度を $f(x,y,t)$ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)=c\,\underbrace{\Delta f(x,y,t)}$$

tを固定して
x,yの関数として
Δを作用させる

熱方程式

となると考えられる（cは正の定数）．

（点(a,b)よりも周りの平均温度が高ければ，その差に比例する速度で(a,b)での温度も上昇する．）

次に D の振動の伝播を考える。
ここでは D に直交する方向の変位のみを扱う。

時刻 t における点 $(x,y)\in D$ の変位を $f(x,y,t)$ とすると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,y,t) = c\,\Delta f(x,y,t)$$

波動方程式

となると考えられる。

（点 (a,b) よりも周りが平均的に持ち上がっていれば，点 (a,b) に存在する媒質は，それに比例する力を（したがって加速度を）受ける。）

⑳ 円形膜の振動

半径1の円形の膜の振動について調べる．中心を$(0,0)$とする．

話を単純化するため

(13.1) $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f$$

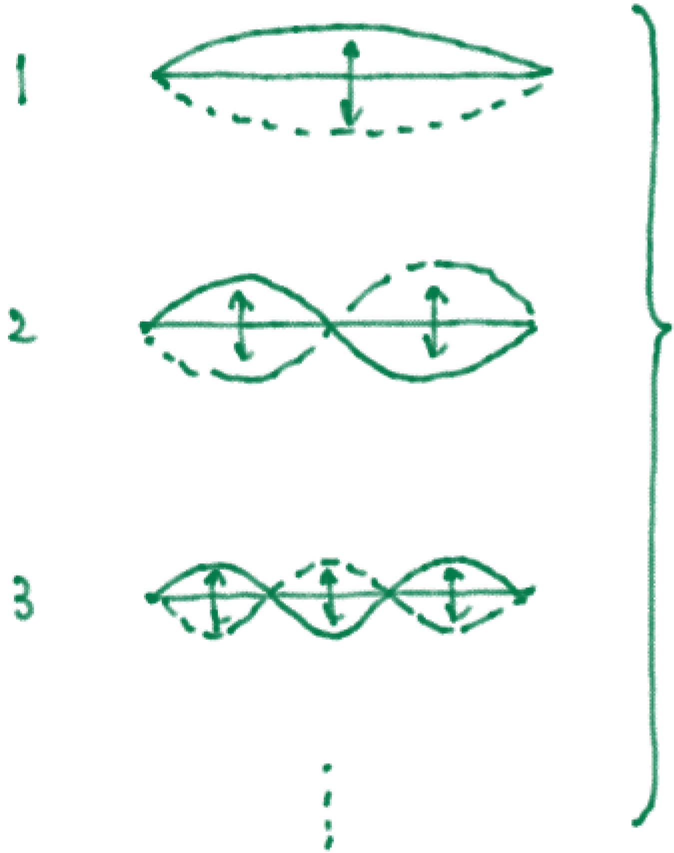
と仮定する．

(13.2) $$f(x,y,t) = 0 \quad (x^2+y^2=1)$$

とする．すなわち縁は一定の高さに固定されているとする．

本当はまず弦の振動について
やるべきですが……

振動数比



一般の振動はこれらの重ね合わせ

これはどこかで学んでください。

目標は"純粋な"振動（基準モードという）がどういうものか知ること。

"純粋な" 振動とは，ここでは

$$F(r)\ G(\theta)\ H(t)$$

(r, θ は極座標)

の形の振動と考える．

命題 13.2

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

である．すなわち，$f : D \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta),$$
$$g(r, \theta) = f(\Phi(r, \theta))$$

とおくと

$$\Delta f(\Phi(r, \theta)) = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}.$$

［証明］ 参考書 問 22.2 (1). □

例 $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(r,\theta)=r^2$.

$$g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}=2+\frac{1}{r}\cdot 2r$$
$$=4.$$

$f(x,y)=\log(x^2+y^2)$, $g(r,\theta)=2\log r$.

$$g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}=-\frac{2}{r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{2}{r}$$
$$=0.$$

これを用いて (13.1) を書き換える.

いま $f(x,y,t)$ が

$$(13.3)\quad f\big(\Phi(r,\theta),t\big)=F(r)G(\theta)H(t)$$

の形だと仮定すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t}\big(\Phi(r,\theta),t\big)=F(r)G(\theta)H''(t),$$

$$\Delta f(\Phi(r,\theta),t)$$
$$= \left(F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)\right)G(\theta)H(t)$$
$$+ \frac{1}{r^2}F(r)G''(\theta)H(t).$$

よって (13.3) のもとで (13.1) は

$$(13.1')\ FGH'' = \left(F'' + \frac{1}{r}F'\right)GH + \frac{1}{r^2}FG''H.$$

(13.1′) が成立するための十分条件として次の方程式系が得られる.

$$\begin{cases} r^2F'' + rF' + (\lambda^2 r^2 - n^2)F = 0 & ① \\ G'' = -n^2 G & ② \\ H'' = -\lambda^2 H & ③ \end{cases}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots,\ \ \lambda > 0$ は定数$)$.

②と③から

$$G(\theta) = A \sin n(\theta+\alpha),$$

$$H(t) = B \sin \lambda(t+\tau)$$

を得る．とくに解の振動数は $\dfrac{\lambda}{2\pi}$．

①の解は，ベッセル関数 J_n を（第1種）用いて

$$F(r) = C J_n(\lambda r)$$

と表すことができる（ここで $\lim_{r\to+0} F(r)$ が収束することを用いた）．(13.2) より $F(1)=0$ が必要なので，λ として許されるのは

$$J_n(\lambda) = 0$$

となるものだけである．

定理 13.3

$$f(\Phi(r,\theta), t) = C J_n(\lambda r)\sin n(\theta+\alpha)\sin\lambda(t+\tau)$$

で定義される f は，$n=0,1,2,\dots$，かつ $\lambda>0$，$J_n(\lambda)=0$ のとき (13.1), (13.2) の解になっている．

さらに，(13.1), (13.2) の "一般の解" は上記の解の重ね合わせとして表すことができる．

注　後半部の証明はだいぶ難しい．

ベッセル関数 J_n について

$J_n(x)=0$ をみたす $x>0$ は

以下のとおり。

何番目? ＼ n	0	1	2	3
1	2.40…	3.83…	5.13…	6.38…
2	5.52…	7.01…	8.41…	9.76…
3	8.65…	10.17…	11.61…	13.01…
4	11.79…	13.32…	14.79…	16.22…
5	14.93…	16.47…	17.95…	19.40…

これらが円形膜の振動に

許される振動数である。