12. 多変数のテイラーの定理，関数の極大・極小

多変数の（スカラー値）関数を考える。記述を簡単にするため2変数の場合に限定する。

◉ 2変数のテイラーの定理

<u>復習</u>　1変数のとき

- 微分可能性

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a)$$

$$(x \to a) \qquad A = f'(a)$$

- 平均値の定理

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

となる c が a と x の間に存在

- テイラーの定理（2次のとき）

(1) $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

となる c が a と x の間に存在

(2) $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o((x-a)^2) \quad (x \to a)$$

以下今日はずっと，断りなく D や f と書いたら

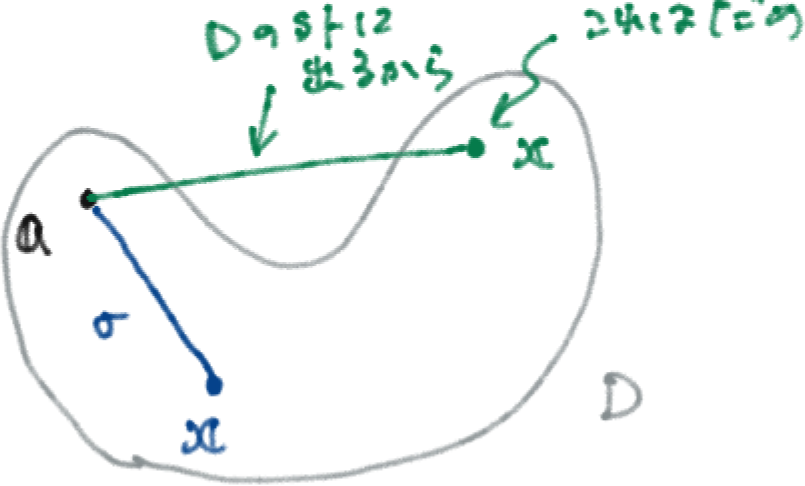
- D は $\mathbb{R}^2$ の開集合
- f は $f: D \to \mathbb{R}$ という関数

であると約束する．

定理 12.1 （2変数の平均値の定理）

f は D 上で C^1 級とする．

$\mathbf{a}, \mathbf{x} \in D$， $\mathbf{a} \neq \mathbf{x}$ とし，さらに $\mathbf{a}$ と $\mathbf{x}$ を結ぶ線分 σ が D に含まれると仮定する．



そのとき，σ 上の両端以外の点 $\mathbf{c}$ であって

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \underbrace{\nabla f(\mathbf{c})}_{\text{横ベクトル}}\ \underbrace{(\mathbf{x}-\mathbf{a})}_{\text{縦ベクトル}}$$

をみたすものが存在する．

定理12.2 (2変数のテイラーの定理，2次の場合) f は D 上で C^2 級とする．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in D$，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{x}$ とし，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ線分 σ が D に含まれると仮定する．そのとき σ 上の両端以外の点 $\boldsymbol{c}$ であって

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) &+ \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\
&+ \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(\boldsymbol{c})(x-a)^2 \\
&\qquad + 2 f_{xy}(\boldsymbol{c})(x-a)(y-b) \\
&\qquad + f_{yy}(\boldsymbol{c})(y-b)^2 \Big)
\end{aligned}
$$

をみたすものが存在する．ただし

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.
$$

(2) $\boldsymbol{a} \in D$ とする。 D の点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ に近づくとき

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) = \boxed{\begin{aligned} & f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \\
& + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(\boldsymbol{a})(x-a)^2 \\
& \quad + 2 f_{xy}(\boldsymbol{a})(x-a)(y-b) \\
& \quad + f_{yy}(\boldsymbol{a})(y-b)^2 \Big) \end{aligned}} \\
+ o\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|^2\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

注 (2) の $\boxed{}$ 部分を f の $\boldsymbol{a}$ における 2次テイラー多項式 という。

注 $\boxed{\quad\quad}$ は

$$f(a)+\nabla f(a)(x-a)$$
$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}$$

とも表せる．（注意：定理 9.3 により $f_{xy}=f_{yx}$．） H を f の a における**ヘッセ行列**とよぶ．

例 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=e^{x+y}$.

f は $\mathbb{R}^2$ 上で C^2 級．原点における 2次テイラー多項式 $P_2(x,y)$ を求める．

$$f_x = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yx}$$
$$= e^{x+y}$$

で，その原点における値は 1．

よって

$$P_2(x,y) = 1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-0 & y-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$$
$$= 1 + x + y + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x+y & x+y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= 1 + x + y + \frac{1}{2}(x+y)^2.$$

[定理 12.1, 12.2 (1) の証明のスケッチ] $c(t) = a + t(x - a)$ とおき

$$F(t) = f(c(t))$$

と定める. F は $[0,1]$ を含む開区間で定義された関数. これに定理 5.2 や定理 7.1 を適用すればいい.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \nabla f(c(t))\, c'(t) \\ &= \nabla f(c(t))\,(x - a) \\ &= f_x(c(t))(x - a) \\ &\quad + f_y(c(t))(y - b) \end{aligned}$$

で

$$F''(t) = \Big(f_{xx}(c(t))(x-a) + f_{xy}(c(t))(y-b) \Big)(x-a) + \Big(f_{yx}(c(t))(x-a) + f_{yy}(c(t))(y-b) \Big)(y-b)$$

$$= f_{xx}(c(t))(x-a)^2 + 2 f_{xy}(c(t))(x-a)(y-b) + f_{yy}(c(t))(y-b)^2.$$

定理5, 2により

$$F(1) = F(0) + F'(t_0) \cdot 1$$

をみたす $t_0 \in (0,1)$ が存在する。

$c = c(t_0) = a + t_0(x-a)$ とおいて

この式を書き直したのが定理12.1.

また定理7.1により

$$F(1) = F(0) + F'(0)\cdot 1 + \frac{F''(t_1)}{2!}\cdot 1^2$$

をみたす $t_1 \in (0,1)$ が存在する。

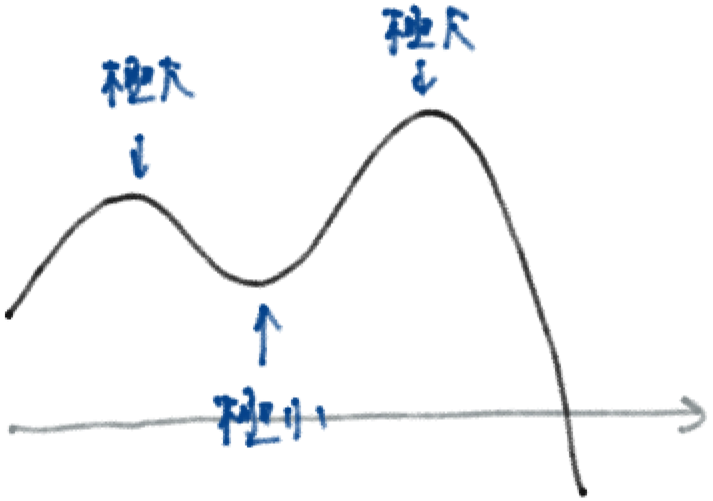
これを書きかえたのが定理12.2 (1) である。 □

定理12.2 (2) は (1) から従う。

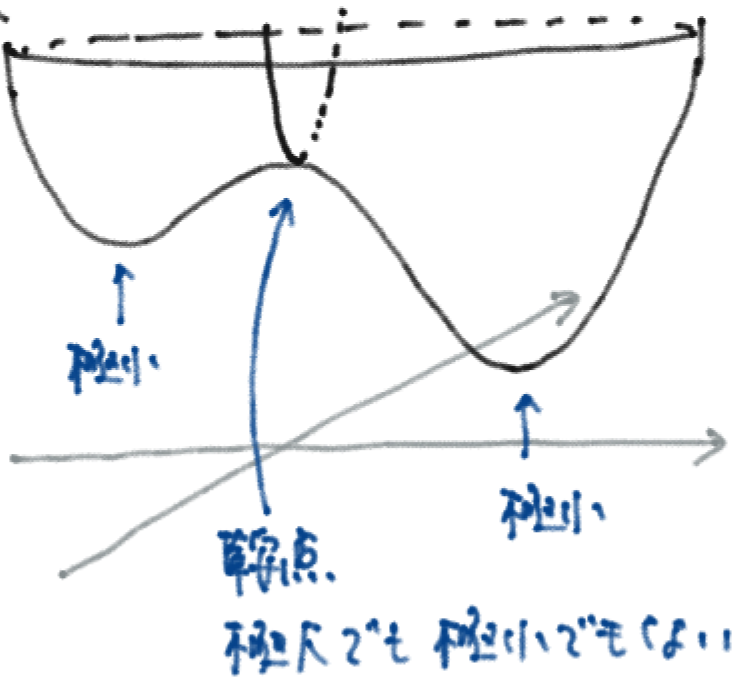
詳しくは教科書 pp. 189–190.

関数の極大・極小

1変数



2変数



定義 点 $a \in D$ において f が

極大値 [**極小値**] をとるとは，

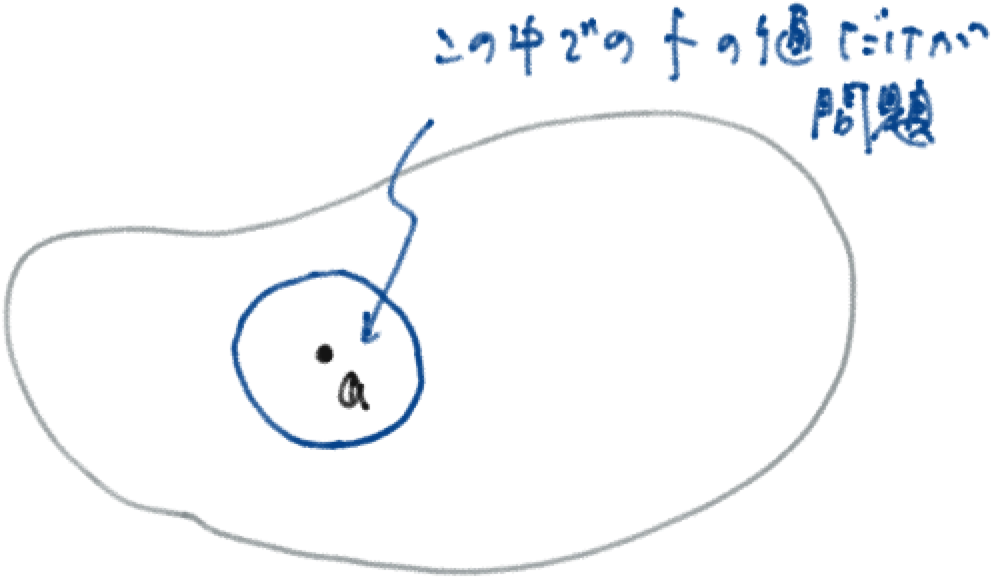
a を中心とする D に含まれる

ある開円板において

$$x \neq a \longrightarrow f(x) < f(a)$$

$$[\, f(x) > f(a) \,]$$

が成り立つことをいう．



極大値と極小値をあわせて **極値** という．

1変数のときと同様に次が成り立つ.

命題 12.3 f は C^1 級であるとする. そのとき

$a \in D$ において f が極値をとる

$$\Longrightarrow \underbrace{f_x(a) = f_y(a) = 0}.$$

↑

このとき a は f の**臨界点**であるという.

[証明] $a = (a, b)$ とおく. $g_1(x) = f(x, b)$ と定めると $x = a$ は g_1 の極値を与えるから

$$0 = g_1'(a) = f_x(a, b).$$

$f_y(a, b)$ についても同様. □

C^1級なら，臨界点（だけ）が極値をとる点の候補になる．

<u>問題</u>　臨界点 (a,b) があるとき，極値をとるかどうか判定するには？

(a,b) を臨界点とする．f が C^2 級なら，定理 12.2 (2) より

$$f(x,y) = f(a,b)$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

$$+\,o\left((x-a)^2+(y-b)^2\right).$$

ただし

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$ とおく。

式(12.1)は、(a,b) 近傍での f の

グラフの概形が、ほぼ

$$(x-a \quad y-b)\, H \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$\left(= \boxed{A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2} \right)$$

で決まることを示唆している。

$\boxed{}$ は，A, B, C の値により

以下のいずれかの性質をもつ．

ケース① $(x,y)\neq(a,b)$

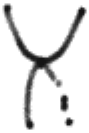
$\Longrightarrow \boxed{} > 0$.

ケース② $(x,y)\neq(a,b)$

$\Longrightarrow \boxed{} < 0$.

ケース③ $\boxed{}$ は正になったり

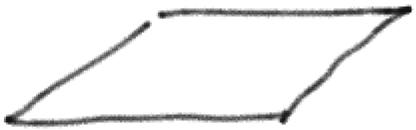
負になったりする．



ケース④ $\boxed{}$ はある方向に

制限するとずっと0

または



あらゆる方向に0

具体的に調べてみる．

(i) $A \neq 0$ のとき

$$\boxed{} = A\left(x-a+\frac{B}{A}(y-b)\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}(y-b)^2$$

(ia) $A>0$, $AC-B^2>0$ ケース①

(ib) $A<0$, $AC-B^2>0$ ケース②

(ic) $AC-B^2<0$ ケース③

(id) $AC-B^2=0$ ケース④

(ii) $A=0$ のとき

(iia) $B \neq 0$ ($\Longleftrightarrow AC-B^2<0$) のとき

$$\boxed{} = 2B(y-b)\left(x-a+\frac{C}{2B}(y-b)\right)$$

ケース③．

(iib) $B=0$ ($\Leftrightarrow AC-B^2=0$) のとき

$\boxed{} = C(y-b)^2$ ケース④

まとめると

ケース① $\Longleftrightarrow$ $A>0$, $AC-B^2>0$.

ケース② $\Longleftrightarrow$ $A<0$, $AC-B^2>0$.

ケース③ $\Longleftrightarrow$ $AC-B^2<0$.

ケース④ $\Longleftrightarrow$ $AC-B^2=0$.

これでだいたい次がわかったことにする.

定理 12.4　f は C^2 級とする.
そのとき, 臨界点 $(a, b) \in D$ において, ヘッセ行列を $H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$
とすると,

(1) $\det H > 0$ のとき
　$A > 0$ なら f は (a, b) で極小値.
　$A < 0$ なら 〃　〃 極大値.

(2) $\det H < 0$ のとき
　f は (a, b) で極値をとらない.

(3) $\det H = 0$ のとき
　この方法ではわからない.

注　証明について．

ケース①②③ $\Bigg\}$ 式(12.1)の項 $o\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$ は極大・極小に影響をもたない．

ケース④　その項の影響が無視できない．

詳しくは教科書 pp. 197-199．

注　(1)の $A \gtrless 0$ という条件は $\mathrm{tr}\, H \gtrless 0$ におきかえることができる．

注　3変数以上だともっと複雑．詳しくは線形代数学IIにて．

例 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 - y^3 - 2xy + y.$$

Step 1 臨界点をすべて求める.

$$f_x = 2x - 2y$$

$$f_y = -3y^2 - 2x + 1$$

なので

$$f_x = f_y = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ -3 & \times & 1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ -3x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (-1, -1) \text{ または } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Step 2　各々判定する．

$f_{xx} = 2.$

$f_{xy} = f_{yx} = -2,$

$f_{yy} = -6y.$

点 $(-1, -1)$ でヘッセ行列は

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

で，$\det H = 8 > 0$，$(1,1)$ 成分は正．ゆえに $(-1,-1)$ で f は極小値をとる．

点 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ では

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

で，$\det H = -8 < 0$．この点で f は極値をとらない．