11. 多変数ベクトル値関数の微分，合成関数の微分法（2）

§ 多変数ベクトル値関数の全微分

（全）微分可能性

定義域 ＼ 終域	スカラー値（実数値）	ベクトル値
一変数	① 第4講	③ 〃10〃
多変数	② 〃8〃	④ 今回

① $f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a)$

② $$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) + o(|x-a|)$$

③ $f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a)$

だった。

<u>定義</u> $D \subset \mathbb{R}^n$ 部分集合

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, a は D の内点

a において f が <u>全微分可能</u>

約束

多変数ベクトル値関数の微分を考えるときは，独立変数（＝入力）も値（＝出力）も縦ベクトルであると理解する．

$x-a$ が n 次元縦ベクトルだから意味をもつ

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f(x) = f(a) + \boxed{A(x-a)} + o(|x-a|) \quad (x \longrightarrow a)$$

をみたす $m \times n$ 行列 A が存在する．

このとき A を f の a における　　Jacobi
ヤコビ行列 といい，

$J_f(a)$ とか $Df(a)$ で表す．

注　多変数スカラー値の場合，
ヤコビ行列は 勾配ベクトルを 横ベクトルとして 書いたもの $(A_1 \cdots A_n)$ である．なぜなら

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i)$$
$$= (A_1 \cdots A_n)\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

だから．

注　上の定義における $o(|x-a|)$ は，ベクトル値関数 $R(x)$ で

$$\lim_{x \to a} \frac{|R(x)|}{|x-a|} = 0$$ をみたすもの．

次は命題9.1と同様にしてわかる．

<u>命題11.1</u>　$D \subset \mathbb{R}^n$，$f : D \to \mathbb{R}^m$．
aはDの内点で，fはaにおいて全微分可能とする．このとき

(1) $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ とおくと

各f_iはaで全微分可能
(よってさらに，各f_iはaで偏微分可能)で，

(2) ヤコビ行列は

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$$

で与えられる．ただし右辺は$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$を第$(i,j)$成分とする$m \times n$行列．

次は 全微分可能性の判定法.
定理 9.2 と同様.

<u>定理 11.2</u> D $\mathbb{R}^n$の開集合

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ とおくと 各f_iはD上 C^1級

$\Longrightarrow$ fはDの各点で全微分可能.

<u>例</u> $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \ \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x} \right)$

($\mathbb{R}^2$の直交座標 $\rightsquigarrow$ 極座標)

$D = \{ (x, y) \mid x \neq 0 \}$ とおいて

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ とみる.

$f_1(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

$f_2(x, y) = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$

とおくと これらは D上 連続で

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

これらも連続だから f_1, f_2 は C^1級.
ゆえに f は D の各点で全微分可能.

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

例 $f(x,y,z) = (xy+yz+zx,\ xyz)$.

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ である．さっきと同様に

$$f_1(x,y,z) = xy+yz+zx,$$

$$f_2(x,y,z) = xyz$$

とおくと これらは C^1 級だから f は

$\mathbb{R}^3$ の各点で全微分可能．

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y+z,\quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = z+x,\quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = x+y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = yz,\quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = zx,\quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = xy$$

だから

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}.$$

③ 合成関数の微分

定理10.1と同様にして次のことがわかる。

定理 11.3

$f: D_1 \to \mathbb{R}^m$ （D_1 は $\mathbb{R}^n$ の開集合）

$g: D_2 \to \mathbb{R}^l$ （D_2 は $\mathbb{R}^m$ の開集合）

とし，f の値域は D_2 に含まれると仮定する．さらに

$$\begin{cases} f \text{ は } a \in D_1 \text{ で全微分可能で，} \\ g \text{ は } f(a) \in D_2 \text{ で 〃} \end{cases}$$

と仮定する．このとき合成関数 $F = g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}^l$ は a で全微分可能で，

$$(10.1)\quad \underbrace{J_F(a)}_{l\times n\text{行列}} = \underbrace{J_g(f(a))}_{l\times m}\,\underbrace{J_f(a)}_{m\times n}$$

(行列の積)

が成り立つ.

<u>注</u> ヤコビ行列を偏微分係数で表せること(命題11.1)を考慮すると式(10.1)は次のようにも書ける.

$$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix},$$

$$g(u_1,\dots,u_m) = \begin{pmatrix} g_1(u_1,\dots,u_m) \\ \vdots \\ g_l(u_1,\dots,u_m) \end{pmatrix},$$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_\ell(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(a)\right) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}(f(a))\right)\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\right)$$

すなわち

$$(10.1') \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a).$$

系11.4

$f: D_1 \to \mathbb{R}^m$ （D_1は$\mathbb{R}^n$の開集合）

$g: D_2 \to \mathbb{R}^l$ （D_2は$\mathbb{R}^m$の 〃 ）

で，fの値域はD_2に含まれ，

さらに f, g が各々 D_1, D_2 の

各点で全微分可能

$\Longrightarrow$ $F = g \circ f$ も D_1 の各点で

全微分可能で

$$(11.2) \quad J_F(x) = J_g(f(x))\, J_f(x).$$

または同じことだが

$$(11.2') \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$$

である．

注 式(11.2′)を省略して

$$(11.2'') \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

と書くこともある．

例 $f(x, y) = (x^3, y^3)$,
$g(u, v) = (u+v, uv)$.
ただし どちらも $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とみる．
f, g はどちらも各成分が C^1 級．
よって $F = g \circ f$ は $\mathbb{R}^2$ 上の各点で全微分可能．

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix},$$

$$J_g(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}$$

だから

$$J_F(x,y) = J_g(f(x,y))\,J_f(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y^3 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 3x^2y^3 & 3x^3y^2 \end{pmatrix}.$$

同じ計算を 式 (11.2'') の記法で

例11.2

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$= 1 \cdot 3x^2 + 1 \cdot 0 = 3x^2,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3y^2 = 3y^2,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$= v \cdot 3x^2 + u \cdot 0$$

$$= y^3 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 0 = 3x^2y^3,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$= v \cdot 0 + u \cdot 3y^2$$

$$= y^3 \cdot 0 + x^3 \cdot 3y^2 = 3x^3y^2$$

と書くこともできる.

例　$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$,

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とおくと,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

$$J_g(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

したがって $F = g \circ f$ とおくと

$$J_F(x,y) = J_g(f(x,y))\, J_f(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (\text{単位行列！})$$

これは $F(x,y) = (x,y)$ だから
当然の結果.

<u>例</u> $(2\text{変数}) \xrightarrow{f} (2\text{変数}) \xrightarrow{g} (1\text{変数})$

$$g(x,y) = x^2+y^2,$$

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

このときは $F = g\circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と
おくと

$$\underbrace{\nabla F(r,\theta)}_{\text{横ベクトルとみる}} = \underbrace{\nabla g(f(r,\theta))}_{\text{横ベクトル}} J_f(r,\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} 2r\cos\theta & 2r\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r & 0 \end{pmatrix}.$$

変数変換 f のもとでの勾配ベクトルの変化は，右から J_f を掛けることで表される．