★ C^1級，C^k級関数の定義に関する補足

前回の講義で，$\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された関数 $f: D \to \mathbb{R}$ が C^1級であることを

(0) f は連続，

(1) f の偏導関数がすべて存在し，いずれも連続

の両方が成り立つことと定義した．

実は (0) を省いても条件としては変わらない．教科書 p. 157 ではその形で定義が述べられている．

同様に，C^k級の定義でも，条件の一部を，全体としての同値性を保ちながら省くことができる．

10. 合成関数の微分 (1)

今回は

$$(1\text{変数}) \longrightarrow (n\text{変数}) \longrightarrow (1\text{変数})$$

という写像の合成を扱う.

● 合成関数の例

<u>例1</u> たとえば

$$F(x) = \cos^2 x \sin^3 x$$

を考える. これは

$$f(x) = (\cos x, \sin x),$$

$$g(u, v) = u^2 v^3$$

の合成関数とみなすことができる.

つまり $F(x) = g(f(x))$.

このことを $F = g \circ f$ とも書く.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "F"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & (\cos x, \sin x) \arrow[r, mapsto] & \cos^2 x \sin^3 x
\end{tikzcd}
$$

$$\cos^2 x \sin^3 x \;\text{''}\; F(x)$$

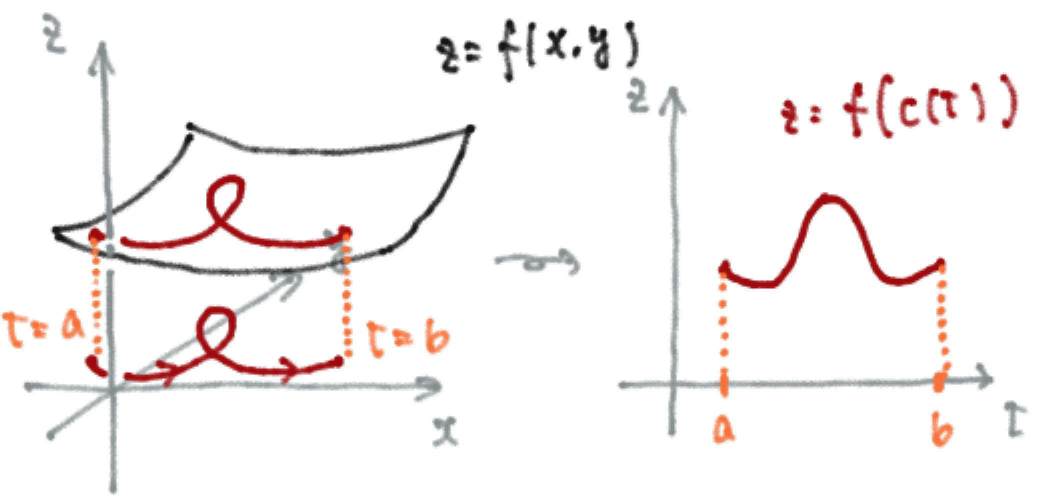
注　これからは 例1の f のように ベクトルを値とする写像も「関数」とよぶ．ただし ベクトル値の場合は「ベクトル値関数」とか「$\mathbb{R}^n$ 値関数」 となどといって，そのことを明示する．

例2　$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D で定義された関数 $f: D \to \mathbb{R}$ があるとする.

D に含まれる曲線 c を考えて, f の c に沿った値を考えることができる. ここで「曲線」とはパラメタづけられた曲線のことで,

$$c: I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (I \text{ は } \mathbb{R} \text{ の区間})$$

という $\mathbb{R}^2$ 値関数で表される.



「時刻 t に対応する曲線 c 上の点に
おける f の値」を $F(t)$ とおくと

$$F(t) = f(c(t))$$

となる.

注 例2で $\mathbb{R}^2$ とした箇所を
全部 $\mathbb{R}^n$ にすることもできる.

ここまでのまとめ

(1) 与えられた関数を
(1変数) $\longrightarrow$ (n変数) $\longrightarrow$ (1変数)
という合成関数とみなせる場合がある.

(2) そのような合成関数は
① n変数関数 $f: D \to \mathbb{R}$ の
② D内の曲線 $c: I \to \mathbb{R}^n$ に沿った値
を考えると自然に現れる.

1変数ベクトル値関数の微分

I を $\mathbb{R}$ の開区間とし

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

を $\mathbb{R}^n$ 値関数とする.

約束

以降, ベクトル値関数を考えるときは, 値は常に縦ベクトルと理解する.

たとえば

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$ など.

定義 c が $a \in I$ において **微分可能** であるとは，以下の (1) または (2)（これらは同値）が成り立つことをいう．

(1) $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ とおいたとき，

$c_1, \ldots, c_n$ がすべて a で微分可能．

(2) $$c(t) = c(a) + A(t-a) + o(t-a) \quad (t \to a)$$

となるような縦ベクトル $A \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

(1) または (2) が成り立つ（したがって両方が成り立つ）とき，

$$A = \begin{pmatrix} c_1'(a) \\ \vdots \\ c_n'(a) \end{pmatrix}$$

である。このベクトルを c の a における

速度ベクトル といい、記号 $c'(a)$ で

表す。

注　条件(2)において

$$\underbrace{A}_{\text{ベクトル}}\ \underbrace{(t-a)}_{\text{スカラー}}$$

は普通の記法とは順番が違うが、

ここでは他の「(全)微分可能性」との

類似を強調するためこう書いた。

$n\times 1$ 行列と 1×1 行列の積とみなせば

許されるだろう。

注　(2) における $o(t-a)$ について．

ベクトル値関数 $R(t)$ について

$$R(t) = o(t-a) \quad (t \to a)$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{t \to a} \frac{|R(t)|}{t-a} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{t \to a} \frac{R(t)}{t-a} = \mathbf{0}.$$

零ベクトル

[(1) $\Longleftrightarrow$ (2) の証明]

<u>(1) $\Longrightarrow$ (2)</u>　仮定 (1) により

$$c_i(t) = c_i(a) + c_i'(a)(t-a) + R_i(t)$$

とおくと　$R_i(t) = o(t-a) \quad (t \to a)$.

これらをまとめて

$$c(t) = c(a) + \begin{pmatrix} c_1'(a) \\ \vdots \\ c_n'(a) \end{pmatrix} (t-a)$$

$$+\begin{pmatrix} R_1(t) \\ \vdots \\ R_n(t) \end{pmatrix}.$$

$$\parallel$$

$R(t)$ とおく.

すると

$$\frac{R(t)}{t-a} \longrightarrow \mathbb{0} \quad (t \to a).$$

($\because$ 各成分 $\dfrac{R_i(t)}{t-a}$ は 0 に収束.)

したがって $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} c_1'(a) \\ \vdots \\ c_n'(a) \end{pmatrix}$ とおくと

$$c(t) = c(a) + \mathbb{A}(t-a) + o(t-a) \quad (t \to a)$$

が成り立つ.

$(2) \Longrightarrow (1)$

$$c(t) = c(a) + A(t-a) + R(t),$$
$$R(t) = o(t-a) \quad (t \to a)$$

であるとする。そのとき、

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \quad R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ \vdots \\ R_n(t) \end{pmatrix}$$

とおけば

$$c_i(t) = c_i(a) + A_i(t-a) + R_i(t).$$

ここで

$$\frac{|R_i(t)|}{|t-a|} \leq \frac{|R(t)|}{|t-a|} \to 0 \quad (t \to a),$$

$$\therefore \quad \frac{R_i(t)}{t-a} \to 0 \quad (t \to a).$$

すなわち

$$c_i(t) = c_i(a) + A_i(t-a) + o(t-a) \quad (t \to a).$$

つまり c_i は a において微分可能で,
$c_i'(a) = A_i$. $\square$

合成関数の微分

定理 10.1

$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ （I は $\mathbb{R}$ の開区間）
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ （D は $\mathbb{R}^n$ の開集合）

とし, c の値域は D に含まれるとする
（よって $F = f \circ c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ が定義される）. さらに

$$\begin{cases} c \text{ は } a \in I \text{ で微分可能,} \\ f \text{ は } c(a) \in D \text{ で全微分可能} \end{cases}$$

と仮定する. そのとき F は $a \in I$ で微分可能で,

$$F'(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(a)) \cdot c_i'(a)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f_{x_1}(c(a)) & \cdots & f_{x_n}(c(a)) \end{pmatrix}}_{f\text{の勾配ベクトル}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1'(a) \\ \vdots \\ c_n'(a) \end{pmatrix}}_{c\text{の速度ベクトル}}$$

（行列としての積，1×1行列を数と同一視）

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f_{x_1}(c(a)) \\ \vdots \\ f_{x_n}(c(a)) \end{pmatrix}}_{f\text{の勾配ベクトル}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1'(a) \\ \vdots \\ c_n'(a) \end{pmatrix}}_{c\text{の速度ベクトル}} .$$

（ベクトルの内積）

[証明] 1変数実数値同士の合成のとき(第4講)と同じ.

$$c(a+h) = c(a) + c'(a)h + R(h)$$
$$= \mathbb{b} + c'(a)h + R(h)$$
$(\mathbb{b} = c(a)$ とおいた$)$,

$$f(\mathbb{b}+\mathbb{k}) = f(\mathbb{b}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbb{b})k_i + \tilde{R}(\mathbb{k})$$

とおく(ここで $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_n)$). すると仮定より

$$R(h) = o(h) \quad (h \to 0),$$
$$\tilde{R}(\mathbb{k}) = o(|\mathbb{k}|) \quad (\mathbb{k} \to \mathbb{0}).$$

ここで

$$R(h) = h\,S(h),$$
$$\tilde{R}(\mathbb{k}) = |\mathbb{k}|\,\tilde{S}(\mathbb{k})$$

とおくと

$$S(h) \to \mathbb{0} \quad (h \to 0),$$
$$\tilde{S}(\mathbb{k}) \to 0 \quad (\mathbb{k} \to \mathbb{0})$$

である．したがって

$$F(a+h) = f(c(a+h))$$
$$= f(\mathbb{b} + c'(a)h + hS(h))$$
$$= f(\mathbb{b}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbb{b})(c_i'(a)h + hS_i(h))$$
$$+ |c'(a)h + hS(h)|\,\tilde{S}(c'(a)h + hS(h)).$$

部は全体として $o(h)$ なので

$$F(a+h) = f(\mathbb{b}) + \left(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbb{b})\, c_i'(a)\right)h + o(h) \quad (h \to 0).$$

$F(a) = f(\mathbb{b})$

□

例 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$,

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y^3$.

このとき $F(t) = f(c(t))$ とおくと，

c, f はともに各点で（全）微分可能だから，F もすべての $t \in \mathbb{R}$ で微分可能．

$$F'(t) = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} f_x(c(t)) \\ f_y(c(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos t \sin^3 t \\ 3\cos^2 t \sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$= -2\cos t \sin^4 t + 3\cos^3 t \sin^2 t.$$

例 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は各点で全微分可能とする．そのとき

$$F(t) = f(t, 1-t)$$

の導関数を求める．$c(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$ とおくと $F(t) = f(c(t))$ だから

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \nabla f(c(t)) \cdot c'(t) \\
&= \begin{pmatrix} f_x(c(t)) \\ f_y(c(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= f_x(t, 1-t) - f_y(t, 1-t).
\end{aligned}$$