

問題 10.A 次の関数 $f(x, y)$ もしくは $f(x, y, z)$ と曲線 $c(t)$ に対して, $F(t) = f(c(t))$ の導関数を, 合成関数の微分法を用いる方法と, $F(t)$ を具体的に t の式で表してから微分する方法の 2 通りのやり方で求めよ. 両者の結果が一致することを確認すること. (教科書の問 19.1 を変更.)

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad c(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad f(x, y) = x + y, \quad c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

$$(3) \quad f(x, y, z) = \sin xyz, \quad c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \quad f(x, y, z) = ze^{xy}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix}.$$

問題 10.B $f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の各点で全微分可能な関数とすると, 次の関数の変数 t に関する導関数を求めよ. (教科書の問 19.2.)

$$(1) \quad F(t) = e^{-t} f(e^t, e^t).$$

$$(2) \quad F(t) = \log f(t, 1-t). \quad (\text{任意の } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ に対し } f(x, y) > 0 \text{ であると仮定する.})$$

$$(3) \quad F(t) = f(f(t, t), f(t, t)).$$

問題 10.C $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級関数とし, 任意の $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と $t > 0$ に対して

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n) \quad (*)$$

が成り立つと仮定する. そのとき

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = k f(x_1, \dots, x_n)$$

であることを示せ. [ヒント: まず, 混乱を防止するために, 証明すべきことを次のように言い換えるのがいいと思う: 任意の $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = k f(a_1, \dots, a_n)$$

が成り立つ. さて, (*) から $f(ta_1, \dots, ta_n) = t^k f(a_1, \dots, a_n)$ でもある. 両辺を t の関数とみて, t について微分するとどうなるか?]