2020 年度・基礎解析学・同演義 I　　　　2020 年 4 月 22 日

1　数と極限

みなさんはじめまして．この「基礎解析学・同演義 I」を担当する松本佳彦です．夏までの間よろしくお願いします．

今学期の授業は，当面，オンラインで行わざるを得なくなりました．私としてもみなさんの顔を見て授業ができないのは難しいのですが，仕方がありません．感染者の広がりを抑えるために，しばらくの間耐えることにしましょう．

この授業を受ける大部分の人は新入生ですね．大学入学の春がこんな状況になってしまったのは本当に不運で残念なことです．本来であれば，新しい人とたくさん出会い，刺激を受けたり与えたりしてほしいのですが，それは何か月後かの楽しみにとっておきましょう．今はこれまでのお友達，親御さんや保護者の方々などとの関係を大切にしてください（もちろん，新入生ではない人も）．

ところで，一つ知っておいてほしいのですが，こういう不安な情勢に乗じて，おかしな集まりへの勧誘をする人もいます．たとえば，大学の新入生というのは毎年カルト宗教の勧誘に狙われるのですが，今年はそれが一層盛んになるかもしれません．犯罪にあたるようなアルバイトへの誘いが増えていることも報道されていました．自分の精神の安定を保ち，またできるだけ多くの人と話す機会をもって，何かおかしいと思ったら逃げられるようにしてください．

困ったことがあったら大学のサポート窓口もあります．全学教育推進機構の Web ページから探すことができます．あるいは，適切な手段が見つからなければ，誰でもよいので助けを求めてください．私に連絡をくれてもかまいません．連絡先は CLE に書いてあります．

それでは，授業とは直接関係ない話はそのくらいにして，数学の話を始めましょう．

❖　この授業の目標

1 年生の数学の科目には「基礎解析学」と「線形代数学」があります．この 2 本立ては阪大でそうなっているだけではなくて，だいたいどこの大学でもそうだし，もっといえば世界中で「大学の新入生が学ぶべき数学」のスタンダードになっています．

なぜこの二つをやるのか．一つの答えは「一変数関数だけでなく多変数関数も扱えるようにしたいから」です．

一変数関数というのは高校の数学で出てきた関数のことで，変数が一つだけ（たとえば x）あって，その値を決めると関数の値も決まる．それに対して多変数関数というのは，変数が x_1，x_2，x_3 みたいに複数あるようなものです．さらに値のほうも y_1，y_2 のように複数あるものを考える場合もあります．

多変数関数を扱えないと困るのは当然のことです．なぜなら，自然界の空間は多次元だし，データサイエンス（あるいは統計といってもいい）で現れる変量も複数のパラメタに依存しているのが普通だからです．

したがって，多変数関数の「微積分」ができる必要がある．そこに辿り着くのが「基礎解析学」の授業の課題です．実際には一変数関数の微積分も振り返る必要があるので，そこから始めることになります．もっと具体的にいうと，一変数関数の微分を近似の観点から理解しなおします．とくに，**微分というのは 1 次関数による近似のことです**．このことが十分に理解できてしまえば，多変数関数の微分もまったく同じ．積分では，リーマン積分の「区分求積法」による定義を行うことや，多変数の変数変換がどうなるか押さえることが主な課題となります．

もう一方の「線形代数学」でやることは，多変数関数を微分することで現れる「多変数の 1 次関数」を扱う技術を身につけることです．一変数の 1 次関数はただの $y = ax$ ですが（微分の文脈で注目すべき 1 次関数は定数項ゼロのものなので，こう書きました），多変数の 1 次関数すなわち線形写像はもう少し複雑で，行列というものによって表されます．さらに，人為的に導入した座標には依存しない量を得るために，「基底」とかその「取りかえ」の概念を調べることになります．

この授業の話に戻ると，われわれの「基礎解析学 I」でやるのは，「一変数関数の微積分の振り返り，および多変数関数の微積分」のうち「微分」の部分です．それを近似の観点に注意しながらやるといいました．

今日は，微積分で扱うべき「関数」の話をする前に，数列の極限の概念にも近似が潜んでいることを説明しましょう．

❖ 近似は誤差評価を伴ってはじめて意味がある

はじめに，円周率 π の，

$$\pi \approx \frac{22}{7} \tag{1.1}$$

という「近似式」を書いてみます（記号 ≒ も日本ではよく使われますが，教科書に合わせて ≈ としました）．右辺 22/7 を小数で表すと $3.142857\cdots$ で，確かに悪くありません．

もっといい近似に

$$\pi \approx \frac{355}{113} \tag{1.2}$$

があります．実際，右辺は $355/113 = 3.1415929\cdots$ です．

ここで，**なぜ，私たちは式 (1.1) や式 (1.2) のことを「π の近似式」だとみなすのか**，ということを考えてみたい．

たとえば，355/113 が π に近いなら，354/113 や 356/113 だって π に近いでしょう．小数で表すと

$$\frac{354}{113} = 3.1327\cdots, \qquad \frac{356}{113} = 3.1504\cdots$$

です．小数第 2 位がずれているからだめでしょうか？ それは主観の問題ですね．歴史的には約 3.16 という値が使われていたこともあったんです（たとえば古代エジプト．ピラミッドを建築する上で問題にならなかったのだろうか？）．それに比べたらいいじゃないですか．

もう少し客観的な反論が聞こえてくる気がします．いわく「同じ分母 113 をもつ分数の中に，355/113 というより良い値がある．それを使わずに 354/113 や 356/113 を使うのは合理

的でない」．それは確かにそうだ．——だとすれば，式 (1.1) や式 (1.2) を見るとき，私たちは暗黙のうちに

「22/7 は 7 を分母にもつ他の分数よりも π に近い（少なくとも他より遠くはない）」,
「355/113 は 113 を分母にもつ他の分数よりも π に近い（遠くはない）」

という内容を読み取っているということが結論されます．式で書けば

$$\left|\frac{22}{7}-\pi\right| \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7},$$
$$\left|\frac{355}{113}-\pi\right| \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{113}. \tag{1.3}$$

これらの不等式が，近似の**誤差評価**です．「π の近似値 22/7 の誤差は高々（たかだか） 1/14」,「近似値 355/113 の誤差は高々 1/226」という言い方もします．

さて，これですべてすっきりしたのだろうか．少し待ってくださいね．今の理屈でいうと 434/138 も π の近似値といっていいことになるんですが，それはよいのでしょうか．つまり

$$\frac{434}{138} = 3.1449\cdots$$

ですが，これは 433/138 や 435/138 より π に近いのです（確かめてください）．でも，434/138 は 22/7 や 355/133 より精度が悪いのですよね．これを近似値と認めるかどうかは意見が分かれるでしょう．あなたはどちらですか？

認めたくない人は，「近似式」(1.2) に，誤差が高々 1/226 であるというより強い意味を見出していることになります．たとえば

$$\left|\frac{355}{113}-\pi\right| \leqq 0.000001 \tag{1.4}$$

であるとか．

そのようにして (1.2) という「近似式」の解釈が分かれるという事実は，(1.2) は「取り扱い注意」の式であることを意味します．数学の論証のように厳密な論理が必要とされる場面では，(1.2) のような式を書いて満足するわけにはいきません．状況に応じて式 (1.3) や式 (1.4) を書いたり，また同等の内容を説明することが，正確な意図を伝えるために不可欠です．

ちなみに，自然科学などでは「有効数字」の考え方があります．測定すべき値をたとえば $G = 6.74$ と書いたら*，それは「小数第 2 位まで書くなら，6.73 でもなく 6.75 でもなく 6.74 とするのが最も妥当」ということだと解釈するのが通例だと思われます．つまり

$$|6.74 - G| \leqq 0.005$$

ということになります．「$G = 6.740$」と書いたら意味が異なることもわかりますね．

*ほんとうは物理量なら単位を添えて $G = 6.74\ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2$ などと書くべきですが，説明の都合上省略します．

数学では「有効数字」を用いた表記をする習慣はありません．こういうことを表したいときは，常に不等式を使います．

❖ 数列の収束は，近似を表現している

いよいよ数列を考えましょう．たとえば，

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ は，自然対数の底 $e = 2.7182818\cdots$ に収束します．つまり n が大きくなるにつれて，a_n は e に限りなく近づきます．そのことを

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{あるいは} \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad (n \to \infty)$$

と書くのでした．

ところで，「n が大きくなるにつれて，a_n がある実数 A に限りなく近づく」とはどういう意味でしょうか．この表現をなんとなく受け入れることにしてもいいのですが（実際，高校ではそうしていました），近似の考えを用いて精密な定義を与えることができます．数列 $\{a_n\}$ が実数 A に収束するというのは，

> 各項 a_n を実数 A の近似値とみなす．そのとき，どれほど精度の高い誤差評価が要求されたとしても，ある番号 N 以降の項についてはその誤差評価がみたされている

ということです．もっと明瞭にいえば次のようになります*．

定義 1.1. 数列 $\{a_n\}$ が**収束する**とは，ある実数 A があって，どんな正の実数 ε に対しても，ある自然数 N をとれば，$n \geqq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．

なお，収束しない数列は**発散する**といいます．

実例で説明しましょう．先ほどの $a_n = (1 + 1/n)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の各項の値は右表のようになります．収束は速くないですね（意外でしょうか？）．$n = 1$，2，3，4，5 では「近似値」といいたいとは思えないような値しか出てきません．ただ，$n = 13$ までいけば，それ以降では誤差は 0.1 未満になることがわかります．記号を用いれば

$$n \geqq 13 \Rightarrow |a_n - e| < 0.1$$

n	a_n
1	2
2	2.25
3	$2.370370\cdots$
4	$2.441406\cdots$
5	2.48832
$\vdots$	$\vdots$
11	$2.604199\cdots$
12	$2.613035\cdots$
13	$2.620600\cdots$
$\vdots$	$\vdots$
100	$2.704813\cdots$
$\vdots$	$\vdots$
134	$2.708207\cdots$
135	$2.7082819\cdots$
$\vdots$	$\vdots$

*この定義は，よく「ε-N（イプシロン・エヌ）論法による数列の収束の定義」とよばれます．

と表すことができます．$n = 135$ で誤差は 0.01 未満になって，記号では

$$n \geqq 135 \Rightarrow |a_n - e| < 0.01$$

です．頑張れば誤差を 0.001 未満にすることもできるでしょう——「そうでなければ『数列 $\{a_n\}$ が e に収束する』とはいえない」というのが，定義 1.1 で述べた定義の立場です．何番目以降の項を考えればいいか探してみましょう（課題にします）．

同じ数 e に収束する別の数列として，

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

で定義される数列 $\{b_n\}$ があります（これが e に収束することは，テイラーの定理の応用として後で証明することになります）．さっきと同じように各項の値を求めてみると右表のようになります．こちらの数列の収束は速い．$n = 3$ ですでに誤差 0.1 未満が達成されています．記号で表してみると

$$\begin{aligned} n \geqq 3 &\Rightarrow |b_n - e| < 0.1, \\ n \geqq 4 &\Rightarrow |b_n - e| < 0.01, \\ n \geqq 6 &\Rightarrow |b_n - e| < 0.001. \end{aligned}$$

n	b_n
0	1
1	2
2	2.5
3	$2.666666\cdots$
4	$2.708333\cdots$
5	$2.716666\cdots$
6	$2.718055\cdots$
$\vdots$	$\vdots$

このように，定義 1.1 の見方には，具体的な N の値によって「収束の速さ」が表現される利点もあります．

注 1.2. 上記の二つの数列はどちらも単調増加数列になっているので，定義 1.1 でいう N の値を見つけるのは簡単です（$\varepsilon = 0.1$ に対する誤差評価がある番号で成り立っていれば，当然，その番号以降でも同じ誤差評価が成り立つ．他の ε についても同様）．単調増加でない数列の場合は，もっと気をつけて論証しなければなりません．

ところで $a_n = (1 + 1/n)^n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ が単調増加であることは明らかとはいえませんが，$\{a_n\}$ の単調増加性は，そもそも自然対数の底 e の定義の観点からも重要なことです．この話は教科書 1.4 節および 2 章で扱われているので，興味がある人はぜひ読んでみてください．講義でも，第 3 講で簡単に触れる予定です．

この講義では，定義 1.1 を用いる論証の練習はやりません．ですが，数列の極限に関する以下に述べるような性質はこの定義に基づいて証明されるのだということを，知識として知っておいてください．

命題 1.3. 数列 $\{a_n\}$ が A に，数列 $\{b_n\}$ が B に収束するとき，以下が成り立つ．

(1) 数列 $\{a_n + b_n\}$ は収束し，その極限は $A + B$ である．
(2) c を実数とするとき，数列 $\{ca_n\}$ は収束し，その極限は cA である．
(3) 数列 $\{a_n b_n\}$ は収束し，その極限は AB である．
(4) $B \neq 0$ ならば，数列 $\{a_n/b_n\}$ は収束し，その極限は A/B である．

命題 1.4 (はさみうちの原理). 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が与えられており，すべての（または，ある番号以降のすべての）n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ が成り立つとする．さらに $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$ であるとする．そのとき数列 $\{c_n\}$ も収束し，その極限は A である．

なお，はさみうちの原理は $a_n < c_n < b_n$ をみたす数列にも適用できます．これは単純な論理の問題です．$a_n < c_n < b_n$ ならば $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ もみたされているからですね．

課題（CLE で解答してください）

問 1.1　$a_n = (1 + 1/n)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，

$$n \geqq N \Rightarrow |a_n - e| < 0.001$$

が成り立つ最小の N を求め，答えてください．

（ヒント：手計算ではもちろん無理だし，普通の電卓も桁が足りなくて正確な計算ができません．Wolfram Alpha*で入力欄に `(101/100)^100` と入れれば a_{100} の値が得られます．プログラムが書ける人はそれもよいですが，小数計算の丸め誤差に注意．SageMath のような数式処理ソフトウェアを使ってみるのも勧めます．）

問 1.2　次の文章の空欄を埋めてください．

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ である．その無限小数表示を小数第 n 位までで打ち切った値を a_n とし，その値に 10^{-n} を加えた値を a'_n とする．すなわち

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, & a'_0 &= \boxed{}, \\
a_1 &= 1.4, & a'_1 &= \boxed{}, \\
a_2 &= 1.41, & a'_2 &= \boxed{}, \\
a_3 &= 1.414, & a'_3 &= \boxed{}, \\
a_4 &= 1.4142, & a'_4 &= \boxed{}, \\
a_5 &= 1.41421, & a'_5 &= \boxed{}, \\
a_6 &= 1.414213, & a'_6 &= \boxed{}, \\
a_7 &= 1.4142135, & a'_7 &= \boxed{}, \quad \cdots\cdots
\end{aligned}$$

である．同様に，$\sqrt{3}$ の無限小数表示 $1.73205080\cdots$ を小数第 n 位までで打ち切った値を b_n とし，その値に 10^{-n} を加えた値を b'_n とする．

任意の n に対し $a_n \leqq \sqrt{2} \leqq a'_n$，$b_n \leqq \sqrt{3} \leqq b'_n$ であり，さらに出現する数はすべて正だから

$$a_n b_n \leqq \sqrt{6} \leqq a'_n b'_n$$

が成り立つ．この不等式を $n = \boxed{}$（あてはまる最小の自然数を答えてください）として用いれば，$\sqrt{6}$ の小数第 3 位までの表示 2.449 がわかる．

*https://www.wolframalpha.com/