

期末レポートの解答例・採点基準，および成績について

期末レポートの採点について

期末レポートの満点は 50 点で，配点は第 1 問から第 5 問まですべて 10 点ずつです．提出形式の指定に従っていなかったものについては，場合により 5 点減点しました*．

得点分布は次のようになりました．最高点は 47 点です．

得点	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50
人数	3	1	7	25	24	0

成績について

得点 $S = S_{\text{平常点}} + S_{\text{期末}}$ に基づき成績を決定します． $S_{\text{期末}}$ (50 点満点) は前項で説明した期末レポートの得点そのものです． $S_{\text{平常点}}$ (50 点満点) は以下のようにしてつけました．

- 全員に無条件で 8 点を加点．
- 初回実施のアンケートに回答していて 2 点．
- 自動採点課題 (全 9 回) に 18 点を配点．CLE 上で集計された 90 点満点の得点を 0.2 倍にしました．提出遅延については，1 回目はペナルティなし，2 回目以降は本来の得点の 60 % としています．
- 掲示板に投稿する課題 (全 11 回) に 22 点を配点．有効な 1 回の投稿につき 2 点．投稿遅延については，1 回目はペナルティなし，2 回目以降は本来の得点の 60 % (1.2 点)．

得点は CLE の「成績表」から参照することができます．「加重合計」の欄が得点 S です (「%」を「点」と読みかえてください)．小数点以下の端数は切り捨てます．ただし，「84.99999」のような点数が表示されている人がいると思いますが，それは CLE の計算の誤りで，実際には (この例であれば) 85 点です．

成績の分布は以下のとおりです．

成績	F	C	B	A	S
得点	0-59	60-69	70-79	80-89	90-100
人数	3	4	9	26	18

*具体的にいえば，「PDF ファイルでない」，「ページ数の超過」は減点しました．「ページサイズが指定と異なる」，「ファイルサイズの超過」は考えた末減点しないことにしました．後者二つは技術を必要とすることかもしれないと思ったからです．

期末レポート解答例・採点基準

1. $x = 0$ において $\tan^{-1} x$ にテイラーの定理を適用する. $f(x) = \tan^{-1} x$ とおくと, この関数は \mathbb{R} 全体で C^3 級であり (実際には C^∞ 級だが, C^3 級であることしか使わない),

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, \quad f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

なので, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -2$ である. テイラーの定理により

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0).$$

したがって

$$\frac{\tan^{-1} x - x}{x^3} = -\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{3} \quad (x \rightarrow 0).$$

コメント・採点基準

テイラーの定理 (漸近展開バージョン) が適用できるための前提の確認 (「 C^3 級」) は不問としました.

漸近展開の式において, 「 $o(x^3)$ 」の箇所が間違っていた場合, それはテイラーの定理を理解していないということなので 5 点減点です. (実は $f'''(0) = 0$ なので「 $o(x^4)$ 」としても正しいのですが, そう書くならそんなふうに理由を説明する必要があります.)

3 次の係数 $-1/3$ が誤っているものもいくつかありました. 5 点減点です. 導関数の計算が誤っている場合も (たまたま係数に影響しないことがあるが, それでも) 同じく 5 点減点. 導関数を書いていないものも同様です.

コーシーの平均値の定理を使う解答もたくさんありました. もちろん正しくできていれば 10 点です. ちょっと遠回りな気もしますが, 微分の計算が 1 回で済むという利点がありますね. 実質的にロピタルの定理を再証明して用いているということでもあります.

2. (1) $f(x, y)$ は D において連続であり, さらに二つの偏導関数

$$f_x(x, y) = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = -\frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

もいずれも D において連続. したがって $f(x, y)$ は D 上の C^1 級関数だから, D の各点において全微分可能である.

- (2) 関数 f を x 軸上に制限して $x \rightarrow 0$ としたときの極限は

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

で, 同様に f を y 軸上に制限して $y \rightarrow 0$ としたときの極限は

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$$

である．仮にもし $f(0,0)$ の値を適切に定義すると f が \mathbb{R}^2 上の連続関数になるのだとすれば，上記の極限はいずれも $f(0,0)$ に一致しなければならないが，二つの極限が異なる以上，そういうことは起こりえない．ゆえに， $f(0,0)$ の値をどのように定めても， f は \mathbb{R}^2 上の連続関数にはならない．

コメント・採点基準

(1) は 5 点． f の連続性に触れずに f_x , f_y の連続性を確かめただけで「 C^1 級である」と結論してもかまいません（詳しくは第 10 講冒頭の補足を参照）．偏導関数の式を書かずに「 C^1 級である」と書いてあるものは，根拠がわからないので 2 点どまりです．偏導関数の計算が誤っているものも 2 点としました．

なお (1) の別解として，「分子 $x^2 - y^2$ と分母 $x^2 + y^2$ はともに D の各点で全微分可能で，さらに分母は 0 という値をとらない．したがって，それらの商である関数 $f(x,y)$ も D の各点で全微分可能である．」というものがあります．この全微分可能性に関する“商の微分法”は講義では扱いませんでしたし，教科書にも載っていませんが，正しい事実です．

(2) も 5 点．どんなに説明がつたなくても，原点に近づく際の方角によって極限が異なることに触れようとしていれば 5 点を与えました．計算に誤りがあれば 2 点どまり．

3. 関数 f は D の各点において全微分可能で， Φ も \mathbb{R}^2 において C^1 級だから各点で全微分可能．したがって合成関数の微分法を適用することができる．各々のヤコビ行列は (f のヤコビ行列は勾配ベクトルを横ベクトルとして書いたものに他ならないことにも注意して)

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \right), \quad J_{\Phi}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\begin{aligned} \nabla g(r,\theta) &= \nabla f(\Phi(r,\theta))J_{\Phi}(r,\theta) \\ &= \left(\frac{4 \cos \theta \sin^2 \theta}{r}, -\frac{4 \cos^2 \theta \sin \theta}{r} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = (0 \quad -4 \cos \theta \sin \theta) \end{aligned}$$

である．ゆえに， $g_r(r,\theta) = 0$, $g_{\theta}(r,\theta) = -4 \cos \theta \sin \theta$.

コメント・採点基準

f および Φ の全微分可能性への言及は不問とします．

ところで，この問題では「合成関数を用いて」と指示していますが，合成関数の微分法を使わなくても偏導関数 g_r , g_{θ} は簡単に計算できます． $g(r,\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ だから $g_r(r,\theta) = 0$, $g_{\theta}(r,\theta) = -2 \sin 2\theta$ ですよね．問題で指示されたことに囚われずに，頭を柔らかくして，こういう計算も裏で実行してほしいと思っています．**現実的な手間で実行できる検算はすべてやるという気概をもってください．回避可能な間違いは回避しなければいけないのです．** そういうわけで，方針がよくてもおかしい結論が出ているものは 0 点です． g_r , g_{θ} のいずれかのみが正しいものは 5 点としました．

4. $61^\circ = 60^\circ + 1^\circ = \pi/3 + \pi/180$ である. そこで $x = \pi/3$ において $\sin x$ にテイラーの定理を適用する. すると

$$\sin 61^\circ = \sin \frac{\pi}{3} + \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 + \frac{1}{6} \cdot (-\cos c) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^3$$

をみたす $c \in (\pi/3, \pi/3 + \pi/180)$ が存在することがわかる. ここで赤枠で囲んだ部分は

$$\boxed{\sin \frac{\pi}{3} + \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 = 0.87462 \dots \quad (*)$$

であり, また

$$\left| \frac{1}{6} \cdot (-\cos c) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \right| < \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 < 0.000001. \quad (**)$$

(*) と (**) の二つの式から, $\sin 61^\circ$ は確実に 0.87461 より大きく, また 0.87463 より小さい. したがって, $\sin 61^\circ$ を小数表示したとき, その第 4 位までの部分は確実に 0.8746 である.

コメント・採点基準

$\sin 61^\circ$ の正確な値が 0.8746... であること自体はさまざまな手段で調べられます. ですから, 結論が誤っている場合は, たとえ方針が正しくても 0 点としました.

「0.8746」という結論が合っていること自体以外に, 加点対象とするために最低限要求したことは, 誤差評価ないし $\sin 61^\circ$ の不等式評価の必要性を理解していることです. つまり「なんとなく二次近似したら 0.8746 が出てきた」ではだめということ. ここまで 5 点.

さらに残りの議論ができていて満点 (10 点) です. ここで理解してほしいのが, 誤差評価だけを議論しても, それだけで「この項まで計算すれば小数第 4 位までの正確な値が求められる」と言い切れることは絶対にならないということ. たとえ誤差が 10^{-10} 未満となるような近似式が作れたとしても, 近似値がたとえば 0.8746 ちょうどであったならば, 真の値が 0.8745... である可能性は捨てきれません. 真の値の小数第 4 位までが 0.8746 だとわかるためには, あくまでも, よい近似値と誤差評価のペアが必要なのです.

なお, 方針はいろいろあり得ます. たとえば,

$$\sin 61^\circ = \sin \frac{\pi}{3} + \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{1}{2} \cdot (-\sin c) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^2$$

をみたす $c \in (\pi/3, \pi/3 + \pi/180)$ が存在することに基づいて次のように「0.8746」を導くことも可能です. $c \in (\pi/3, \pi/3 + \pi/180)$ なのでとくに $c \in (\pi/3, 5\pi/12)$ であり, \sin の単調性から $\sin(\pi/3) < \sin c < \sin(5\pi/12)$ すなわち

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin c < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

ゆえに

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 < \sin 61^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^2$$

であって, 左辺, 右辺を具体的に計算して $0.874604 \dots < \sin 61^\circ < 0.874620 \dots$ です.

補足コメント

以下は減点対象にはしなかったことなのですが、補足させてください。

解答例であっさり書いた(*)や(**)をどのようにして導けばよいかという話です。どちらも同じことなので、ここでは(*)に焦点をあてます。

たとえば以下のような計算が多く見られました。「 $\sqrt{3} \approx 1.73205$, $\pi \approx 3.14159$ だから

$$\boxed{} \approx \frac{1.73205}{2} + \frac{3.14159}{2 \cdot 180} - \frac{1.73205 \cdot 3.14159^2}{2 \cdot 2 \cdot 180^2} = 0.87461 \dots$$

というもの。でもこれではまずいのです。そもそも $\sqrt{3} \approx 1.73205$, $\pi \approx 3.14159$ という近似を用いた計算しかしていないので、「0.87461」が $\boxed{}$ の小数第 5 位までの値として正しい保証がありません。実際、正しくありません。(*)に書いたとおり、 $\boxed{}$ の正確な値は「0.87462…」です。 $\sqrt{3} \approx 1.73205$, $\pi \approx 3.14159$ とした際の“丸め誤差”が悪さをして、小数第 5 位が狂ってしまいました。

これを避けるにはどうすべきなのか。一つの考え方は $\sqrt{3} \approx 1.7320508$, $\pi \approx 3.1415927$ のようなもっと精密な近似を使うことですが、どこまですればいいのか、指針がありません。実用上は「適当に桁の数を十分多くしておけばいいだろう」という考え方で問題は生じないと思いますが、ここでは論理的に 100 パーセント確実といえる方法を考えましょう。

そのためにまず、式(*)の意味を再度よく考えておきます。(*)はもちろん「 $\boxed{}$ を十進小数展開すれば、その初めの部分は 0.87462…である」ということですが、別の言い方をすると「 $\boxed{}$ は 0.87462 以上かつ 0.87463 より小さい」ということですね。つまり、(*)を確かめるとは、実質的に、ある不等式を証明するということです。

そこで、 $1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206$ とか $3.14159 < \pi < 3.14160$ のような不等式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1.73205}{2} + \frac{3.14159}{2 \cdot 180} - \frac{1.73206 \cdot 3.14160^2}{2 \cdot 2 \cdot 180^2} &< \boxed{} \\ &< \frac{1.73206}{2} + \frac{3.14160}{2 \cdot 180} - \frac{1.73205 \cdot 3.14159^2}{2 \cdot 2 \cdot 180^2} \end{aligned}$$

だから……といった議論をする。これが論理的に確実な方法です。(実はこれだと計算を進めても $0.87462 \leq \boxed{}$ は得られないので、より詳しく $1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$ などを使って同じことをするか、あるいは(*)を実際に証明できる不等式に置きかえてしまう必要があります。)

しかし、繰り返しになりますが、こういうことをしていなくてもとくに減点はしないことにしました。

5. (1) $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$ は \mathbb{R}^2 上で定義された C^2 級関数である。まず臨界点を求める。偏導関数は $f_x = (1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2}$, $f_y = -2xye^{-x^2-y^2}$ であり、臨界点、すなわち $f_x = f_y = 0$ となる点は $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ の 2 点。

各臨界点において f のヘッセ行列 H を求め、それを用いて極値をとるかどうかが

判定する．準備として f の 2 階偏導関数を求めておくと

$$f_{xx} = (-6x + 4x^3)e^{-x^2-y^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = -2y(1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2}, \\ f_{yy} = (-2x + 4xy^2)e^{-x^2-y^2}.$$

2 点 $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ において一斉に調べることにする．以下では複号同順．点 $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ におけるヘッセ行列は

$$H = \begin{pmatrix} \mp 2\sqrt{2}e^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mp \sqrt{2}e^{-1/2} \end{pmatrix}$$

で, $\det H = 4e^{-1} > 0$. ゆえに f は $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ のいずれにおいても極値をとる．より詳しくいえば, ヘッセ行列の $(1, 1)$ 成分が点 $(1/\sqrt{2}, 0)$ では負, 点 $(-1/\sqrt{2}, 0)$ では正だから, 前者において f は極大値, 後者において f は極小値をとる.

- (2) $f(x, y) = (ax + by)e^{-x^2-y^2}$ は \mathbb{R}^2 上で定義された C^2 級関数である．偏導関数は $f_x = (a - 2x(ax + by))e^{-x^2-y^2}$, $f_y = (b - 2y(ax + by))e^{-x^2-y^2}$ であり, 臨界点の座標がみたす方程式 $f_x = f_y = 0$ は

$$\begin{cases} a - 2x(ax + by) = 0, \\ b - 2y(ax + by) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

と同値である．

さて, いま (x, y) が臨界点だとして．そして $X = ax + by$ とおく．すると $(*)$ より $a = 2xX$, $b = 2yX$ である．ここで $X = 0$ ではありえない (なぜなら, そうだとすると $a = b = 0$ となってしまう)．したがって $x = a/2X$, $y = b/2X$ と表せる．これらを再度 $(*)$ に代入して

$$a - \frac{a(a^2 + b^2)}{2X^2} = 0, \quad b - \frac{b(a^2 + b^2)}{2X^2} = 0.$$

a, b のうち少なくとも一方は 0 でないから, 上に書いた二つの式から $1 - (a^2 + b^2)/2X^2 = 0$ すなわち $X = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}/2$ を得る．よって

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \quad (\text{複号同順}). \quad (**)$$

以上で議論したのは $(**)$ が $(*)$ の必要条件であることにすぎないが, 逆に, $(**)$ は $(*)$ をみたしていることが確認できる．したがって f の臨界点は $(**)$ によって与えられる 2 点である．記号を簡単にするため, これらの臨界点を p_{\pm} と書くことにしよう (複号同順)．

p_{\pm} において f のヘッセ行列 H を求める． f の 2 階偏導関数は

$$f_{xx} = (-6ax - 2by + 4x^2(ax + by))e^{-x^2-y^2}, \\ f_{xy} = f_{yx} = (-2bx - 2ay + 4xy(ax + by))e^{-x^2-y^2}, \\ f_{yy} = (-2ax - 6by + 4y^2(ax + by))e^{-x^2-y^2}$$

であり、これらの \mathbf{p}_{\pm} における値が知りたい（以下ずっと複号同順とする）。ここであらためて $X = ax + by = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$ とおくと、臨界点では $x = a/2X$, $y = b/2X$ である。これらを上の 3 式に代入して

$$f_{xx}(\mathbf{p}_{\pm}) = -\frac{2a^2 + b^2}{X}e^{-1/2}, \quad f_{xy}(\mathbf{p}_{\pm}) = f_{yx}(\mathbf{p}_{\pm}) = -\frac{ab}{X}e^{-1/2},$$

$$f_{yy}(\mathbf{p}_{\pm}) = -\frac{a^2 + 2b^2}{X}e^{-1/2}$$

だから、ヘッセ行列は

$$H = -\frac{e^{-1/2}}{X} \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & ab \\ ab & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix} = \mp \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)/2}} \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & ab \\ ab & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix}.$$

行列式を求めると

$$\det H = \frac{e^{-1}}{(a^2 + b^2)/2} ((2a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2) - (ab)^2) = 4e^{-1}(a^2 + b^2) > 0$$

だから、2 点 \mathbf{p}_{\pm} の両方で f は極値をとる。より詳しくいえば、 $f_{xx}(\mathbf{p}_{+}) < 0$, $f_{xx}(\mathbf{p}_{-}) > 0$ だから、点 \mathbf{p}_{+} において f は極大値、点 \mathbf{p}_{-} において f は極小値をとる。

コメント・採点基準

(1) は 5 点。臨界点を正しく求めるところまでで 2 点としました（計算の省略は許す）。その後の部分については、問題は極大値・極小値の区別を求めているので、その区別が誤っていても減点していません（しかし間違えた人はよく再確認すること）。 $\det H = 4e^{-1/2}$ のような誤りがときどきありました。これは

$$H = e^{-1/2} \begin{pmatrix} \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \mp \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と書いた上で行列式を求める際に、 $e^{-1/2}$ を 2 乗し忘れているものです（一般に $n \times n$ 行列 A について $\det(cA) = c^n \det A$ です）。これは致命的な結果になり得るので（くくり出した定数 c が負だったら？）、後半の 3 点はあります。

(2) も 5 点。(1) と同様に、臨界点を求めるところまでで 2 点、その後まで全部できて 5 点ですが、今度は臨界点を求める計算を省略したものは許容していません（この場合、後半も採点対象としません）。この計算は本質的に難しいもので、省略するという考え方はあり得ないと思います。ただし、臨界点の計算に着手しているものの説明が一部おかしくて、しかし結果としては正しいものを書いて先に進んでいるケースでは、前半の 2 点は加算しますが、後半を採点対象として、きちんとできていれば 2 点を与えています。