名古屋大学・幾何学特別講義 II（松本）　　2026 年 11 月 20 日

# レポート課題

下記から 1 問以上を選んで解答してください．締め切りは 12 月 18 日（金）です．

1. 行列群 $G$（ここでは $GL(n,\mathbb{R})$ の閉部分群のこと）について，その Lie 環 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \text{ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在し，すべての } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ について } e^{tX} \in G\}$$

と定義する．直交群 $O(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ が交代行列の全体 $\{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^tX + X = O\}$ に等しいことを証明せよ．

2. $n$ 次元多様体 $M$ 上の互いに共形的な二つの Riemann 計量 $g$，$\hat{g} = e^{2\Upsilon} g$ に対し*，Riemann 曲率テンソル $R$，$\hat{R}$ の関係は，各チャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ において次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\hat{R}_{ij\ \ l}^{\ \ k} = R_{ij\ \ l}^{\ \ k} &+ g_{il}\Upsilon_j{}^k - g_{jl}\Upsilon_i{}^k - \delta_i{}^k\Upsilon_{jl} + \delta_j{}^k\Upsilon_{il} \\ &- g_{il}\Upsilon_j\Upsilon^k + g_{jl}\Upsilon_i\Upsilon^k + \delta_i{}^k\Upsilon_j\Upsilon_l - \delta_j{}^k\Upsilon_i\Upsilon_l + (g_{il}\delta_j{}^k - g_{jl}\delta_i{}^k)|d\Upsilon|^2.\end{aligned}$$

ここで $\Upsilon_i$ は $d\Upsilon$ の成分（いいかえれば偏導関数 $\partial\Upsilon/\partial x^i$）をあらわす．$\Upsilon_{ij}$ は $g$ の定める Levi-Civita 接続による $d\Upsilon$ の共変微分 $\nabla d\Upsilon$ の成分で，Christoffel 記号を用いれば

$$\Upsilon_{ij} = \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial x^j} - \Gamma^k{}_{ji}\Upsilon_k$$

である（右辺第 2 項では Einstein の規約を採用して和の記号を省略した．以下同様）．添字を上げる場合は $\Upsilon^j = g^{ij}\Upsilon_i$，$\Upsilon_i{}^j = g^{jk}\Upsilon_{ik}$ のように定める．$|d\Upsilon|^2$ は $g^{ij}\Upsilon_i\Upsilon_j$ すなわち $\Upsilon_i\Upsilon^i$ のこと．$\delta$ は Kronecker のデルタ．

さて，$n \geqq 3$ のとき $g$ の Weyl テンソル $W$ を

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}_{ij} - \frac{S}{2(n-1)}g_{ij}\right)$$

とおいた上で

$$W_{ij\ \ l}^{\ \ k} = R_{ij\ \ l}^{\ \ k} + P_{il}\delta_j{}^k - P_{jl}\delta_i{}^k - P_i{}^k g_{jl} + P_j{}^k g_{il}$$

によって定義する．$\hat{g}$ についても同様に $\hat{W}$ を定義する．このとき $W_{ij\ \ l}^{\ \ k} = \hat{W}_{ij\ \ l}^{\ \ k}$ を確かめよ．（したがって Weyl テンソルは共形構造 $c$ のみで定まっている．）

---

*Υ はギリシャ文字 υ（ウプシロン）の大文字のつもりですが，書体の関係でふつうの $\overset{ワイ}{Y}$ にしかみえなくなってしまいました．$Y$ だと思って書いてもいいです．

3. 共形多様体 $(M, c)$ において，$TM$ の接続 $\nabla$ が $c$ を保つとは，$c$ を代表する任意の Riemann 計量 $g$ に対し，ある $\alpha \in A^1(M)$ が存在して，任意のベクトル場 $X$，$Y$，$Z$ について $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + \alpha(X)g(Y,Z)$ が成りたつことをいう．
   (1) 上記の「ある $\alpha \in A^1(M)$ が存在して……」という条件は，ある $g \in c$ について成立していればすべての $g \in c$ について自動的に成立する．そのことを確かめよ．
   (2) $c$ を保つ torsion-free な接続 $\nabla$ のことを Weyl 接続という．$\nabla$ を Weyl 接続とするとき，別の $\nabla'$ が Weyl 接続であるためには，ある $\beta \in A^1(M)$ が存在して

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \beta(X)Y + \beta(Y)X - g(X,Y)\beta^\sharp$$

   であることが必要十分である（ただし $g \in c$ は任意にとる．$\beta^\sharp$ は $g$ に関して $\beta$ に双対的なベクトル場．$g(X,Y)\beta^\sharp$ は $g$ の選びかたに依存しない）．これを示せ．

4. $\mathbb{R}^{n+2}$ に不定値内積 $q(\xi,\eta) = \xi^0\eta^{n+1} + \xi^{n+1}\eta^0 + \sum_{i=1}^n \xi^i\eta^i$ を与えたものを $\mathbb{R}^{n+1,1}$ と書く．その null cone を $N$ とする．$\mathbb{R}^{n+1,1}$ を射影化した空間 $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n+1,1}$（これは $n+1$ 次元射影空間）には，$N$ の射影化 $\mathbb{P}N$ が部分多様体として含まれている．講義で説明した方法によって，$\mathbb{P}N$ は $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ と同一視される．
   $\mathbb{P}N$ に自然に共形構造が定まっていることをみたい．任意の点 $p \in \mathbb{P}N$ において，接空間 $T_p\mathbb{P}N$ のベクトル $v_1$，$v_2$ を考える．$p = [\xi]$ となる $\xi \in N \setminus \{0\}$ をとり，$\eta_1$，$\eta_2 \in T_\xi(N \setminus \{0\})$ を，射影 $\pi : N \setminus \{0\} \to \mathbb{P}N$ について $\pi_*\eta_1 = v_1$，$\pi_*\eta_2 = v_2$ をみたすようにとる．$\eta_1$，$\eta_2$ は $T_\xi\mathbb{R}^{n+1,1}$ の元なので，$T_\xi\mathbb{R}^{n+1,1}$ を $\mathbb{R}^{n+1,1}$ と同一視すれば不定値内積 $q(\eta_1,\eta_2)$ が意味をもつことに注意する．
   (1) $\xi$ を固定する．$q(\eta_1,\eta_2)$ は $\eta_1$，$\eta_2$ の選びかたによらないことを示せ．
   (2) $\xi$ を固定し，$\langle v_1, v_2\rangle = q(\eta_1,\eta_2)$ によって $T_p\mathbb{P}N$ の対称双線型形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を定める．これが正定値であることを示せ．
   (3) 射影 $N \setminus \{0\} \to \mathbb{P}N$ の $C^\infty$ 級切断 $\sigma$ を選ぶごとに，各 $p \in \mathbb{P}N$ において $T_p\mathbb{P}N$ 上の内積を $\xi = \sigma(p)$ として (2) の方法で定めると $\mathbb{P}N$ 上の Riemann 計量がえられる．これを $g_\sigma$ で表そう．別の $N \setminus \{0\} \to \mathbb{P}N$ の切断 $\hat{\sigma} = f\sigma$ をとると $g_{\hat{\sigma}} = f^2 g_\sigma$ であることを示せ．したがって $[g_\sigma]$ が $\mathbb{P}N$ 上の well-defined な共形構造を与える．
   (4) $\mathbb{R}^n \subset \hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{P}N$ 上では，上記の共形構造は Euclid 計量で代表されることを示せ．

5. $\hat{\mathbb{R}}^n$ 上の下記の Möbius 変換は，$\mathbb{P}N$ 上の変換と考えると $G = PO(n+1,1)$ のどのような元で与えられるか説明せよ．(a) 平行移動 $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$（ただし $\infty \longmapsto \infty$）(b) 直交変換 $\boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x}$（ただし $A$ は $n$ 次直交行列，$\infty \longmapsto \infty$）(c) 相似拡大または縮小 $\boldsymbol{x} \longmapsto \lambda\boldsymbol{x}$（ただし $\lambda > 0$，$\infty \longmapsto \infty$）(d) 反転 $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^2$（ただし $0 \longmapsto \infty$，$\infty \longmapsto 0$）

6. 上記以外に講義に関連して気になった問題を取りあげて解答せよ．小さな問題でもかまわない．問題を正確に説明するよう努めること．