§9 de Rham コホモロジー群 (1)

今回は，de Rham コホモロジー群の定義から直接証明できることを扱う．

9.1 多様体 M について，連結成分の個数が有限であると仮定し，その個数を k とする．そのとき，$H^0_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}^k$ であることを示せ．

9.2 M，N を多様体，$F\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．

(1) 微分形式の引き戻し $F^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ を用いて，コホモロジー群のあいだの写像（同じ記号 F^* で表す）

$$F^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M), \qquad [\omega] \mapsto [F^*\omega]$$

を定義する．この $F^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ が well-defined であることを示せ．

(2) F が微分同相写像ならば，$F^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ が同型写像であることを示せ．

9.3 次を証明せよ：

$$H^k_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \mathbb{R}, \qquad k = 0, 1.$$

［ヒント：問 3.3 の α が定めるコホモロジー類 $[\alpha]$ が $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1)$ の非自明な元を与える．それが非自明であることの証明は，本質的には問 2.6 と同じ．$\dim H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) = 1$ である理由を考えよう．］

9.4 M をコンパクトな $2n$ 次元多様体とし，$\omega \in \Omega^2(M)$ が**シンプレクティック形式**，すなわち $d\omega = 0$ かつ $\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{ 個}}$（$\omega^n$ と書く）が nowhere vanishing であるとする．

(1) ω^n が完全形式でないことを示せ．

(2) $1 \leq k \leq n-1$ に対しても $\omega^k = \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{k\text{ 個}}$ が完全形式でないことを示せ．

したがって，$0 \leq k \leq n$ に対し $H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$.