§8　微分形式の積分，Stokes の定理 (2)

タイトルは「微分形式の積分，Stokes の定理 (2)」だが，このプリントの趣旨は，なんとかして de Rham の定理を述べることにある（演習問題は 2 問しかない）．de Rham コホモロジー群 $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ はそれ自身としても面白いかもしれないが，de Rham の定理によって $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ と他のホモロジー群・コホモロジー群との関係が判明することで，より興味深いものになる．

以下では駆け足で，微分形式の特異チェインにおける積分とそれに付随する Stokes の定理を説明し，de Rham の定理を素朴な形で定式化する．これは村上信吾『多様体　第 2 版』（共立出版，1989 年）の 3.2 節，3.3 節をさらに圧縮したものに近い*ので，この本を合わせて参照するとよいと思う．証明は村上の本には載っていない．たとえば J. M. Lee の本†を読むとよい．

もっと理論的に整備されたバージョンの de Rham の定理は，多様体において，de Rham コホモロジー群，（$\mathbb{R}$ 係数）特異コホモロジー群，（$\mathbb{R}$ 係数）Čech コホモロジー群のあいだに自然な同型があることを主張する．これは層係数コホモロジー群の一般論とともに学ぶのがいい．F. W. Warner の本‡が非常に読みやすい．

$k \geq 1$ に対し，$\mathbb{R}^k$ の原点 e_0 と各軸の単位点 e_i（$1 \leq i \leq k$）を頂点とする k 単体§のことを Δ^k で表し，**標準 k 単体**（standard k-simplex）という．すなわち

$$\Delta^k = \{\, (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1, \ldots, x_k \geq 0,\, x_1 + \cdots + x_k \leq 1 \,\}.$$

$k = 0$ のときは，Δ^0 とは 1 点だけからなる位相空間 $\{\, e_0 \,\}$ のことであると約束する．

多様体 M の**特異 k 単体**（singular k-simplex）とは，任意の C^∞ 級写像 $\sigma\colon \Delta^k \to M$ （すなわち，Δ^k の $\mathbb{R}^k$ における開近傍で定義された M への C^∞ 級写像の Δ^k への制限）のことである．ただし $k = 0$ のときは「C^∞ 級」が意味をもたないので，任意の写像 $\sigma\colon \Delta^0 \to M$ のことを特異 0 単体とよぶ．

➢ 普通は連続写像 $\sigma\colon \Delta^k \to M$ のことを特異 k 単体といい，いま述べたものは C^∞ 級特異 k 単体などというが，ここでは C^∞ 級のものしか考えないので，そちらに「特異 k 単体」の語をあてる．

特異 k チェイン（singular k-chain）c とは，有限個の特異 k 単体の，整数を係数とする形式的な線型結合のことをいう．つまり $c = \sum_{i=1}^N n_i\sigma_i$（$n_i \in \mathbb{Z}$，各 σ_i は特異 k 単体）というものである．特異 k チェイン全部のなす $\mathbb{Z}$ 加群を $C_k(M)$ または単に C_k と書く．別のいい方をす

*正確にいうと，われわれが $\mathbb{Z}$ 係数の特異ホモロジー群を使うのに対して，村上は $\mathbb{R}$ 係数の特異ホモロジー群を使っている点が違う．

†J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2003.

‡F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983.

§0 単体は点である．次元が上がるにつれ，線分，三角形，四面体，……となる．

れば，$C_k(M)$ とは M の特異 k 単体全部の集合を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群（自由アーベル群）であり，その各元を特異 k チェインとよぶということである．なお，特異 k 単体 σ 自身を，1σ という特異 k チェインと同一視する．

次に**境界作用素**（the boundary operator）$\partial\colon C_k \to C_{k-1}$ を定義する．$k=0$ のときは $C_{-1}=0$ と定義し，$\partial\colon C_0 \to C_{-1}$ は零写像とする．$k \geq 1$ のときまず，$0 \leq i \leq k$ に対し，写像 $\varepsilon_i^{(k)}\colon \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ を，e_0，e_1，$\cdots$，$e_{k-1} \in \mathbb{R}^{k-1}$ をこの順で e_0，e_1，$\cdots$，$\check{e}_i$，$\cdots$，$e_k \in \mathbb{R}^k$ へと移す（$\check{}$ は取り除くことを示す）アフィン写像*の Δ^{k-1} への制限とする．特異 k 単体 σ の**境界** $\partial\sigma$ とは

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i^{(k)}$$

という特異 $k-1$ チェインのことである．この ∂ を $\mathbb{Z}$ 加群の準同型へと拡張したのが，境界作用素 $\partial\colon C_k \to C_{k-1}$ である．

8.1　$k \geq 1$ とする．任意の特異 k チェイン c に対し $\partial^2 c = 0$ であることを示せ．［ヒント：$k \geq 2$ として，任意の特異 k 単体 σ に対し $\partial^2\sigma = 0$ を示せば十分である．$i > j$ のとき $\varepsilon_i^{(k)} \circ \varepsilon_j^{(k-1)} = \varepsilon_j^{(k)} \circ \varepsilon_{i-1}^{(k-1)}$ であることを示し，利用せよ．］

特異 k チェイン $c \in C_k(M)$ は，$Z_k(M) = \mathrm{Ker}(\partial\colon C_k(M) \to C_{k-1}(M))$ に属すとき**サイクル**（cycle）とよばれ，また $B_k(M) = \mathrm{Im}(\partial\colon C_{k+1}(M) \to C_k(M))$ に属すとき**バウンダリー**（boundary）とよばれる．問題 8.1 から $B_k(M) \subset Z_k(M)$ である．そこで k 次（C^∞ 級）**特異ホモロジー群**（the singular homology group）$H_k(M)$ を

$$H_k(M) = Z_k(M)/B_k(M)$$

と定義する．これは $\mathbb{Z}$ 加群（アーベル群）である．

➢ 前の注で触れたように，C^∞ 級のものに限らず連続な特異 k 単体の全部を考え，同じようにしてホモロジー群をつくることもできる（それがむしろ「普通」である）．そちらを単に**特異ホモロジー群**という．多様体については，実は，特異ホモロジー群と C^∞ 級特異ホモロジー群が自然に同型となることが示される．

さらに，多様体の単体分割（三角形分割）によって得られる単体複体のホモロジー群も，これらと自然に同型である．

*線型写像と平行移動の合成で表されるような写像．すなわち，$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ がアフィン写像であるとは，ある $m \times n$ 行列 A とベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ によって $F(x) = Ax + b$ と表されるということ．

つづいて微分形式の積分を論じる．ω を M の k 次微分形式とする．$k \geq 1$ のとき，特異 k 単体 $\sigma \colon \Delta^k \to M$ に沿った ω の積分 $\int_\sigma \omega$ とは，ω の引き戻し $\sigma^*\omega$ の Δ^k における積分のことである．すなわち

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega.$$

ただし右辺は, $\sigma^*\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k$ と表したとき, 通常の多重積分 $\int_{\Delta^k} f\, dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_k$ のことを意味する．

$k = 0$ のときは，特異 0 単体とは $\sigma \colon \Delta^0 = \{e_0\} \to M$ という写像なので，0 次微分形式（= 関数）ω の積分 $\int_\sigma \omega$ とは，関数 ω の $\sigma(e_0)$ における値のことだと約束する．

特異 k チェイン $c = \sum_{i=1}^N n_i \sigma_i$ における k 次微分形式 ω の積分を

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^N n_i \int_{\sigma_i} \omega$$

によって定義する．

特異チェインにおける微分形式の積分を定式化すると，積分の双線型性があらわになる．つまり，積分を

$$\langle c, \omega \rangle = \int_c \omega$$

とおいて 2 変数の関数

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_k(M) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$$

とみなすならば，これは第 1 変数について $\mathbb{Z}$ 線型，第 2 変数について $\mathbb{R}$ 線型である．

Stokes の定理には，この特異チェインにおける微分形式の積分について述べたバージョンもある．それが次の定理である．形式的には，境界つき多様体における積分に関する Stokes の定理と同じ形をしていることが見てとれるだろう．

Stokes の定理（特異チェインにおける積分バージョン）　任意の特異 $k+1$ チェイン $c \in C_{k+1}(M)$ と k 次微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ に対して

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

このバージョンの Stokes の定理を用いると,

$$H_k(M) \times H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}, \qquad ([c], [\omega]) \mapsto \int_c \omega \tag{$*$}$$

と定義できることがわかる（問題 8.2）．ここからまた，

$$I\colon H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{Hom}(H_k(M), \mathbb{R}), \qquad [\omega] \mapsto \left([c] \mapsto \int_c \omega\right)$$

という写像が得られる．ここで $\mathrm{Hom}(H_k(M), \mathbb{R})$ は，$H_k(M)$ から $\mathbb{R}$ への $\mathbb{Z}$ 加群の準同型全体のなすベクトル空間を表す．

8.2　(∗) の写像が well-defined であることを示せ．

de Rham の定理の主張（のひとつの形）は次のとおりである．

de Rham の定理　$I\colon H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathrm{Hom}(H_k(M), \mathbb{R})$ はベクトル空間の同型写像である．

➢ $H_k(M)$ はここでは C^∞ 級特異ホモロジー群のことだが，特異ホモロジー群（連続な特異 k 単体を用いて定義したもの）とも同型なのだった．特異ホモロジー群は，定義から明らかに M の位相構造だけから定まっている．したがって de Rham の定理から，$H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ も実は位相構造だけで決まっていることがわかる！