§7　微分形式の積分，Stokes の定理 (1)

n 次元の向きづけられた多様体 M を考える．簡単のため，M に境界はなく，かつコンパクトであるとする．M 上の n 次微分形式 ω について，積分

$$\int_M \omega$$

は 1 の分割を用いて定義された．ところがこの方法は，理論的には便利である一方，実際に計算するときはまず役に立たない．

実際に積分を計算するには，Stokes の定理が使えることもあるが，そうでなければ多様体をいくつかの部分に分割し，各々の部分で積分を求めて足し合わせるのが現実的な方法である*.

定理　$\{(U_i, \varphi_i)\}$ を高々可算無限個の M の局所座標近傍からなる族とし，各 (U_i, φ_i) は与えられた M の向きに関して正の座標近傍であるとする．さらに，$\bigcup_i U_i$ は集合の直和（すなわち相異なる i，j に対して $U_i \cap U_j$ は空集合）であって，$M \setminus \bigcup_i U_i$ は測度 0 の集合であるとする．そのとき

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* \omega.$$

ただし右辺に現れる積分は，開集合 $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ における Lebesgue 積分である．$\varphi_i(U_i)$ が有界で，かつ境界が測度 0 の集合になっていれば，Riemann 積分と考えてもよい．

多様体 M の部分集合 C が測度 0 の集合であることの定義については，松本幸夫『多様体の基礎』定義 15.VII（p. 216）を参照.

微分形式の積分の実例として，$\mathbb{R}^3$ の単位球面 S^2 において，（標準的な）面積形式 σ の積分

$$\int_{S^2} \sigma \tag{7.1}$$

を求めてみよう．ここで σ とは，$\mathbb{R}^3$ の 2 次微分形式 $\alpha = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ の，包含写像 $\iota\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ による引き戻し $\iota^* \alpha$ のことだった（問題 5.1 を参照）.

7.1　上記の定理を用いて積分 (7.1) の値を求めよ．

7.2　Stokes の定理を用いて積分 (7.1) の値を求めよ．

---

*以下については J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, 2003 の命題 14.7（p. 356）を参考にした．Lee は Riemann 積分で議論しているので分割にもっと細かな条件がつくが，ここでは Lebesgue 積分を使うことにしたので条件が簡明になった.

さらにいくつか問題を追加する．なお，一般に n 次元多様体 M，その k 次元部分多様体 N，M 上の k 次微分形式 ω があるとき，

$$\int_N \omega$$

というのは，包含写像 $\iota\colon N \to M$ による引き戻し $\iota^*\omega$ の N における積分のことだった．

7.3　［出典：前掲の Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* の p. 382.］
$\mathbb{R}^4$ の点を (x, y, z, w) と書く．トーラス $T^2 = \{\, x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1 \,\} \subset \mathbb{R}^4$ において

$$\int_{T^2} yzw\, dx \wedge dz$$

を求めよ（T^2 には好きな向きを入れて計算してよい）．

7.4　［出典：do Carmo, *Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag, 1994 の p. 70.］
$\mathbb{R}^3 \setminus \{\, 0 \,\}$（$\mathbb{R}^3$ の原点を 0 と書いた）において次のように定める．

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

(1)　$d\omega = 0$ を示せ．

(2)　M を原点を通らない $\mathbb{R}^3$ の曲面（2 次元部分多様体）とし，向きを任意に与える．この向きづけられた曲面 M について，原点から M を**見込む立体角**を

$$\Omega = \int_M \omega$$

で定義する．さて，C^∞ 級の境界をもつ $\mathbb{R}^3$ の有界領域 X について，境界 ∂X は原点を通らないと仮定し，また ∂X に自然な向きを与える．そのとき原点から $M = \partial X$ を見込む立体角 Ω は，$0 \in X$ ならば 4π，$0 \notin X$ ならば 0 である．このことを示せ．

7.5　［前問の Ω の幾何学的解釈．出典：do Carmo の同じ本の p. 70.］
前問の ω について次を証明せよ．ただし曲面 M（2 次元であることを強調して「M^2」と書かれている）は原点を通らないものとする．「The restriction of ω to M^2」とあるのは ω の引き戻しのこと．また，面積形式（area form と言ったほうがよいと思うがここでは area element と記されている）σ の定義は問題 5.2 にあるとおりだが，その定義を適用するためには，M が 0 を正則値とする C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ によって $M = f^{-1}(0)$ と表されていなければならない．そうなっていると仮定してよい．

授業で配布したプリントには，上記の本の第 4 章演習問題の，問題 3a の画像が載っています．Web 公開版からは削除しました．