§6　多様体上の微分形式の外積，外微分

多様体 M 上の微分形式の外積 $\omega \wedge \eta$，外微分 $d\omega$ を記述するには，局所座標表示を使う方法と，ベクトル場を用いた局所座標に依存しない表示を使う方法がある．

以下，M 上の k 次微分形式全体のなす集合を $\Omega^k(M)$ で表す．

まず外積について．局所座標表示では，

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \qquad \eta = \sum_{j_1<\cdots<j_k} g_{j_1\cdots j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$

に対し

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ j_1<\cdots<j_l}} f_{i_1\cdots i_k} g_{j_1\cdots j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}. \tag{6.1}$$

ベクトル場を用いた局所座標に依存しない表示では，

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)}). \tag{6.2}$$

論理的には，(6.2) を定義とみなして，(6.1) はその帰結と考えるのがよいと思う．

外積の基本的な性質として，$C^\infty(M)$ 双線型性のほかに，

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega \qquad (\text{ただし } \omega \in \Omega^k(M),\ \eta \in \Omega^l(M)), \tag{6.3}$$

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta) \tag{6.4}$$

がある．これらの証明について考える．局所座標表示を使う方針もあるし，局所座標に依存しない表示を使う方針もあるが，ここでは後者を検討してみる．

6.1

(1)　$\omega \in \Omega^1(M)$，$\eta \in \Omega^1(M)$ のとき $(\omega \wedge \eta)(X, Y) = \omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(X)$ を確かめよ．

(2)　$\omega \in \Omega^1(M)$，$\eta \in \Omega^2(M)$ のとき $(\omega \wedge \eta)(X, Y, Z) = \omega(X)\eta(Y, Z) - \omega(Y)\eta(X, Z) + \omega(Z)\eta(X, Y)$ を確かめよ．

(3)　$\omega \in \Omega^2(M)$，$\eta \in \Omega^2(M)$ のときに同様の等式を導け．

6.2　$\omega \in \Omega^1(M)$，$\eta \in \Omega^2(M)$ のとき，$(\eta \wedge \omega)(X, Y, Z)$ を計算して問 6.1 (2) の式と比較することにより $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$ を確かめよ．

6.3　$\omega \in \Omega^1(M)$，$\eta \in \Omega^1(M)$，$\zeta \in \Omega^2(M)$ のとき，$((\omega \wedge \eta) \wedge \zeta)(X, Y, Z, W)$ と $(\omega \wedge (\eta \wedge \zeta))(X, Y, Z, W)$ を計算して比較することにより $(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$ を確かめよ．

次に外微分について．局所座標表示では，

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

に対し

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} df_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} = \sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_j \frac{\partial f_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}. \tag{6.5}$$

ベクトル場を用いた局所座標に依存しない表示では，

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\ldots,\check{X}_i,\ldots,X_{k+1})) \\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\check{X}_i,\ldots,\check{X}_j,\ldots,X_{k+1}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

（ここで ˇ はそれを取り除くことを示す）．外積のときと同様，論理的には，(6.6) を定義とみなして，(6.5) をその帰結と考えるのがよいと思う．

外微分の基本的な性質として，$\mathbb{R}$ 線型性のほかに，

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta \qquad (\text{ただし } \omega\in\Omega^k(M),\ \eta\in\Omega^l(M)), \tag{6.7}$$

$$d^2\omega = 0 \tag{6.8}$$

がある（ここで (6.8) の左辺は $d(d\omega)$ の意味）．これらの証明について，今度もまた，局所座標表示ではなく，局所座標に依存しない表示を使う方針を検討してみる．

6.4

(1) $\omega\in\Omega^1(M)$ のとき $d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$ を確かめよ．

(2) $\omega\in\Omega^2(M)$ に対して $d\omega(X,Y,Z)$ の同様の表示を求めよ．

(3) $\omega\in\Omega^3(M)$ に対して $d\omega(X,Y,Z,W)$ の同様の表示を求めよ．

6.5　$\omega\in\Omega^1(M)$，$\eta\in\Omega^1(M)$ のとき，$(d(\omega\wedge\eta))(X,Y,Z)$ と $(d\omega\wedge\eta-\omega\wedge d\eta)(X,Y,Z)$ を計算して比較することにより $d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta-\omega\wedge d\eta$ を確かめよ．

➢ $\omega\in\Omega^1(M)$，$\eta\in\Omega^2(M)$ について同様の計算をするときはいくつの項が現れるだろうか？

6.6　ベクトル場 X，Y，$Z\in\mathfrak{X}(M)$ に対して，$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ を証明せよ（**Jacobi の恒等式**）．

6.7　$\omega\in\Omega^1(M)$ のとき，$d^2\omega(X,Y,Z)$ を計算して，$d^2\omega=0$ であることを確かめよ．