§5　多様体上の微分形式 (3)

今回は一般の k 次微分形式を考える．

5.1　$\mathbb{R}^3$ の 2 次微分形式 $\alpha = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ を考える．S^2 を $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする単位球面として，α を包含写像 $\iota\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ によって引き戻して得られる S^2 の 2 次微分形式 $\sigma = \iota^*\alpha$ を，S^2 の（標準的な）面積形式という．

$U = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\,\}$ とおき，ここに

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

によって座標系 (r, θ, φ) を導入することができる．ただし θ，φ の値はそれぞれ区間 $(-\pi/2, \pi/2)$，$(0, \pi)$ にとるものと約束する．さらに，θ，φ を $U' = U \cap S^2$ に制限すれば，(θ, φ) は S^2 の U' における局所座標系を与える．

2 次微分形式 α の $(U; r, \theta, \varphi)$ における局所座標表示を求めよ．また，面積形式 σ の $(U'; \theta, \varphi)$ における局所座標表示を求めよ．

5.2　$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，0 がその正則値であるとする．そのとき $S = f^{-1}(0) = \{\,x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\,\}$ とおけば，これは $\mathbb{R}^3$ の部分多様体である．

$f > 0$ の側を「S の外側」とみなすことにして，各点 $p \in S$ における外向きの単位法ベクトルを N_p とする．そのとき，S の面積形式とよばれる 2 次微分形式 σ が，

$$\sigma_p(X, Y) = (dx)_p \wedge (dy)_p \wedge (dz)_p(N_p, X, Y), \qquad X, Y \in T_pS$$

によって定義される．

さて，S の $\mathbb{R}^3$ における近傍 U において，f の偏導関数をそれぞれ f_x，f_y，f_z として

$$\alpha = \frac{f_x\,dy \wedge dz + f_y\,dz \wedge dx + f_z\,dx \wedge dy}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}$$

と定める．そのとき面積形式 σ が，包含写像 $\iota\colon S \to U$ による α の引き戻し $\iota^*\alpha$ に一致することを証明せよ．

近いうちに微分形式を積分することについて考えるが，そのためには，多様体の**向き**の概念が必要になる．問 5.3 のような状況では S には「外側」,「内側」があり，それによって自然に「向き」が定まっているように思われる．だが，抽象的に与えられた多様体 M に関しては，その「外側」,「内側」を考えることができない．そこで次のようにする．

まず，n 次元 C^∞ 多様体 M の $U \cap V \neq \emptyset$ をみたす二つの座標近傍 $(U; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $(V; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ について，これらが**同じ向きである**ということを，$U \cap V$ の各点 p において座標変換の Jacobi 行列式が正であることと定める：

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right) > 0.$$

座標近傍系 $\mathcal{S} = \{\,(U_\lambda; x_1^\lambda, x_2^\lambda, \ldots, x_n^\lambda)\,\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**向きを定める**とは，$\mathcal{S}$ に属する任意の二つの座標近傍について，それらが交わるならば同じ向きであることをいう．

多様体 M に向きを定める座標近傍系 $\mathcal{S}$ が一つ与えられているとき，M は**向きづけられている** (oriented) という．さらにそのとき，M の座標近傍 $(U; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は，$\mathcal{S}$ に含まれる座標近傍と同じ向きであるとき，**正の座標近傍**であるという言い方をする．

多様体 M に向きを定める座標近傍系が存在するとき，M は**向きづけ可能** (orientable) であるという．

5.4　σ コンパクトな多様体 M について，M が向きづけ可能であるためには，nowhere vanishing な n 次微分形式 α（すなわち，任意の点 $p \in M$ において $\alpha_p \neq 0$ であるような n 次微分形式 α）が存在することが必要十分である．これを証明せよ．

5.5　$\tilde{M} = (-1, 1) \times \mathbb{R}$ に

$$(x, y) \sim ((-1)^m x, y + m) \qquad (\text{任意の } m \in \mathbb{Z} \text{ について})$$

という同値関係を導入する．商位相空間 $M = \tilde{M}/\!\sim$ のことを **Möbius の帯**という．

Möbius の帯 M に座標近傍系を導入したい．まず

$$W_1 = (-1, 1) \times (0, 1), \qquad W_2 = (-1, 1) \times (-1/2, 1/2)$$

とおく．商写像 $\pi\colon \tilde{M} \to M$ の各 W_λ（$\lambda = 1$，2）への制限が，像 $U_\lambda = \pi(W_\lambda)$ への同相写像であることを証明せよ．そこで逆写像 $(\pi|_{W_\lambda})^{-1}\colon U_\lambda \to W_\lambda$ を φ_λ とおく．このときさらに $\mathcal{S} = \{\,(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\,\}$ が M の C^∞ 座標近傍系であることを確かめよ．

5.6　Möbius の帯（前問にもとづき C^∞ 多様体とみなす）は向きづけ不可能である．そのことを証明せよ．

5.7　実射影平面 P^2 が向きづけ不可能であることを証明せよ．