§4　多様体上の微分形式 (2)

多様体における 1 次微分形式の**引き戻し**は次のように定義される．M，N を多様体（次元は違っていてもよい），$\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級写像，α を N 上の 1 次微分形式とするとき，$\varphi^*\alpha$ とは

$$(\varphi^*\alpha)(X_p) = \alpha((d\varphi)_p X_p), \qquad X_p \in T_pM$$

で定義される M 上の 1 次微分形式である．

次の問題により，この定義は，§2 で $\mathbb{R}^n$ の場合について述べた定義と整合的である．

問 4.1　$\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．$(U; x_1, \ldots, x_m)$ は M の座標近傍，$(V; y_1, \ldots, y_n)$ は N の座標近傍であって，$\varphi(U) \subset V$ であるとする．そのとき，

$$\varphi^*(f\,dy_j) = (f \circ \varphi)d\varphi_j$$

であることを，上記の定義にもとづき証明せよ．ただしここで φ_j とは，φ を局所座標を用いて $\varphi(x_1, \ldots, x_m) = (\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m))$ と表したときの第 j 成分として現れる関数のことである．

多様体 M 上の 1 次微分形式 α と C^∞ 曲線 $\gamma\colon [a, b] \to M$ に対して*，α の γ に沿った**線積分**とは

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) dt$$

のことである．各 $t \in [a, b]$ において速度ベクトル $d\gamma/dt$ は $T_{\gamma(t)}M$ の元であり，それを α に代入して得られる実数が $\alpha(d\gamma/dt)$ である．上式の右辺では，この $\alpha(d\gamma/dt)$ を $t \in [a, b]$ の関数とみて積分している．（この定義はさらに，区分的 C^∞ 曲線の場合にも自然に拡張される．）

再び，§2 で $\mathbb{R}^n$ の場合について述べた定義との整合性を確かめておこう．

問 4.2　多様体 M 上に，1 次微分形式 α と C^∞ 曲線 $\gamma\colon [a, b] \to M$ が与えられているとする．さらに，γ の像 $\gamma([a, b])$ がある座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ に含まれていると仮定する．そのとき，U における α の局所座標表示を $\alpha = f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n$ とし，また U において $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ とすれば，

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))\frac{d\gamma_i}{dt}dt$$

である．このことを証明せよ．

---

*γ は C^1 曲線としておいてもよいが，ここではこだわらずに C^∞ 曲線とした．

次の事実は基本的で，また問 2.6 を解くためにも有用である．

問 4.3　$\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とし，M の C^∞ 曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ が与えられているとする．そのとき，α を N 上の 1 次微分形式とすれば，

$$\int_{\varphi\circ\gamma} \alpha = \int_\gamma \varphi^*\alpha$$

である（左辺に現れる $\varphi\circ\gamma\colon [a,b] \to N$ は N の C^∞ 曲線であることに注意）．このことを証明せよ．

問 2.6 では，γ を単位円周を反時計回りに一周する曲線として

$$\int_\gamma \alpha$$

を求めるとよい（そして問 2.4 の結果と比較する）．この線積分は，定義から直接計算することもできるが，問 2.1 と問 4.3 を組み合わせて求めることもできる．後者の方法なら追加の計算はほとんどいらない（ただし問 2.1 の写像 F の値域が $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 全体ではないため，何らかの工夫は必要になる）．

問 2.7 を解くには手持ちの道具では足りない．曲線のホモトピーと線積分の関係について調べてほしい．