§3　多様体上の微分形式 (1)

C^∞ 多様体 M 上の 1 次微分形式 α とは，各点 $p \in M$ ごとに余接空間 T_p^*M の元 α_p が与えられている族 $\{\alpha_p\}_{p\in M}$ のことである．開集合 $U \subset M$ でも「U 上で定義された 1 次微分形式」の概念が意味をもつ．

とくに，座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ では，U 上の 1 次微分形式 $dx_1, \ldots, dx_n$ が

$$(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p \text{ は } \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \text{ の双対基底である}$$

と約束することで定義される*.

また，関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ に対しその全微分とよばれる 1 次微分形式 df がある．これは接ベクトル $X \in T_pM$ に対し $(df)_p(X) = Xf$ とすることで定義される．

問 3.1　多様体 M の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_n)$ において

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \tag{$\star$}$$

であることを，$dx_1, \ldots, dx_n$ と df の定義にもとづいて証明せよ．

➢ 関係式 ($\star$) から，座標 x_i を U 上で定義された関数とみなすと，その全微分は dx_i に一致することがわかる．これは初めから dx_i を x_i の全微分として定義してもよいということでもある．

多様体の具体例として球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を思い出す（以降，とくに断らない限り原点を中心とする単位球面とする）．S^n の座標近傍系をつくるために，ここでは立体射影を使うことにしよう．$\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な座標を $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ とする．北極 $p_+ = (0, \ldots, 0, 1)$ に関する立体射影 $\varphi\colon S^n \setminus \{p_+\} \to \mathbb{R}^n$ とその逆写像は

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}) = \left(\frac{X_1}{1 - X_{n+1}}, \ldots, \frac{X_n}{1 - X_{n+1}}\right),$$
$$\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \ldots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, -\frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}\right)$$

である．また，南極 $p_- = (0, \ldots, 0, -1)$ に関する立体射影 $\psi\colon S^n \setminus \{p_-\} \to \mathbb{R}^n$ とその逆写像は

$$\psi(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}) = \left(\frac{X_1}{1 + X_{n+1}}, \ldots, \frac{X_n}{1 + X_{n+1}}\right),$$
$$\psi^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + |y|^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1 + |y|^2}, \frac{1 - |y|^2}{1 + |y|^2}\right)$$

*講義での定義と違うかもしれない．どちらの定義を使ってもよいが，どちらを使うのかははっきりと意識し，また循環論法が起こらないように注意すること．以降でも同じようなことがあると思う．

で与えられる．

問 3.2　$\mathbb{R}^{n+1}$ の座標 X_{n+1} を $\mathbb{R}^{n+1}$ で定義された関数とみて，それを S^n に制限したものを h とする（“高さ関数”）．h の全微分 dh を $(S^n \setminus \{p_+\}, \varphi)$，$(S^n \setminus \{p_-\}, \psi)$ において局所座標表示せよ．

さて，微分形式 α を具体的に記述するときには，一気に大域的な記述を与えるのが困難な場合も多い．そういうときは，各座標近傍において局所座標表示を与えることにより α を定めるという手もある．ただしこの場合，二つの座標近傍の共通部分において，同じ微分形式が与えられていることを確かめる必要が出てくる．具体的には座標変換の計算を行うことになる．$(U; dx_1, \ldots, dx_n)$ と $(V; dy_1, \ldots, dy_n)$ の共通部分 $U \cap V$ において

$$dy_j = \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\, dx_i$$

という関係が成り立つことを用いる．

問 3.3　円周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を考える．次のように座標近傍 $(U; \theta_1)$，$(V; \theta_2)$ を定義する：

$$\begin{aligned} U &= S^1 \setminus \{(1,0)\}, & \varphi(\cos\theta_1, \sin\theta_1) &= \theta_1 \quad (0 < \theta_1 < 2\pi), \\ V &= S^1 \setminus \{(-1,0)\}, & \psi(\cos\theta_2, \sin\theta_2) &= \theta_2 \quad (-\pi < \theta_2 < \pi). \end{aligned}$$

U 上の 1 次微分形式 α_U，V 上の 1 次微分形式 α_V をそれぞれ

$$\alpha_U = d\theta_1, \qquad \alpha_V = d\theta_2$$

によって定める．$U \cap V$ 上で $\alpha_U = \alpha_V$ であることを確かめよ．したがって S^1 の微分 1 形式 α を

$$\alpha_p = \begin{cases} (\alpha_U)_p, & p \in U, \\ (\alpha_V)_p, & p \in V \end{cases}$$

と定義することができる．

問 3.3 のような方法で α を定義することを指して，「α_U と α_V を貼り合わせて α を定義する」ということがある．$(\alpha_U)|_{U\cap V} = (\alpha_V)|_{U\cap V}$ は「貼り合わせ可能性条件」といえる．

問 3.4　球面 S^2 に，北極からの立体射影 φ と南極からの立体射影 ψ によって，座標近傍 $(U; x_1, x_2)$，$(V; y_1, y_2)$ を定義する．ただし $U = S^2 \setminus \{p_+\}$，$V = S^2 \setminus \{p_-\}$ である．U の微分 1 形式 α_U，V の微分 1 形式 α_V をそれぞれ

$$\alpha_U = \frac{x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1}{(1 + |x|^2)^2}, \qquad \alpha_V = \frac{y_1\, dy_2 - y_2\, dy_1}{(1 + |y|^2)^2}$$

によって定める．$U \cap V$ 上で $\alpha_U = \alpha_V$ であることを確かめよ．したがって，α_U と α_V を貼り合わせて S^2 の微分 1 形式 α を定義することができる．