§2　$\mathbb{R}^n$ の開集合上の微分形式 (2)

引き戻し (pullback)

$U \subset \mathbb{R}^m$，$V \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，U の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$，V の座標を $(y_1, \ldots, y_n)$ と書くことにする．

$F = (F_1, \ldots, F_n)\colon U \to V$ を C^∞ 級写像とする．V の微分形式 $\alpha = \sum f\, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$ について，α の F による**引き戻し** $F^*\alpha$ とは，

$$F^*\alpha = \sum (f \circ F)\, dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k}$$

という U の微分形式のこと．

F^* は，V の k 次微分形式の空間 $\Omega^k(V)$ から U の k 次微分形式の空間 $\Omega^k(U)$ への $\mathbb{R}$ 線型写像である．

計算上は，引き戻しとは代入操作である．たとえば $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2, 2x_2)$ による $dy_1 \wedge dy_2$ の引き戻しは

$$F^*(dy_1 \wedge dy_2) = d(x_1 + x_2^2) \wedge d(2x_2) = (dx_1 + 2x_2\, dx_2) \wedge 2\, dx_2 = 2\, dx_1 \wedge dx_2$$

だが，これは「$dy_1 \wedge dy_2$ に $(y_1, y_2) = (x_1 + x_2^2, 2x_2)$ を代入している」のだと考えるとよい．

問 2.1　$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$，$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とする（0 は $\mathbb{R}^2$ の原点）．$F\colon U \to V$ を $F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定義する．V の 1 次微分形式

$$\alpha = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

の F による引き戻し $F^*\alpha$ を求めよ．

問 2.2　任意の k 次微分形式 α について，$F^*(d\alpha) = d(F^*\alpha)$ であることを示せ．（d と F^* はどちらも $\mathbb{R}$ 線型なので，$\alpha = f\, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$ について確かめればよい．）

1 次微分形式の線積分

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし, $\gamma\colon [a,b] \to U$ を C^1 曲線とする（つまり, γ は $[a,b]$ の開近傍から U への C^1 級写像に拡張できるとする）．そのとき，1 次微分形式 $\alpha = f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n$ の曲線 γ に沿った積分（線積分）を

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}\,dt$$

によって定義する．ただし $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ と書いた．

- ➢ 上記の定義式の右辺は，$\displaystyle\int_a^b \gamma^* \alpha$ とも表すことができる．ただし $[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではないので，厳密にはさっきの引き戻しの定義をそのまま適用することができない．仮定により，γ は $[a,b]$ の開近傍を定義域とする C^1 級写像 $\tilde{\gamma}$ に拡張できるのだから，この $\tilde{\gamma}$ による α の引き戻し $\tilde{\gamma}^*\alpha$ を $[a,b]$ に制限したものを $\gamma^*\alpha$ と書いているのだと思えばよい．（さらにもう一点注意．このように拡張 $\tilde{\gamma}$ を考えることにしてもなお，$\tilde{\gamma}$ は一般には C^∞ 級ではなく単に C^1 級でしかないのだが，引き戻しの定義を C^1 級写像の場合へと自然に拡張できることは明らかだろう．）
- ➢ 線積分の定義は，さらに区分的 C^1 曲線の場合にも自然に拡張できる．つまり，C^1 曲線になっている部分に区切ってそれぞれ線積分をつくり，それらの和をとる．

問 2.3　$\alpha = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$ とする．$\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma(t) = (t, t^2)$ で定義される曲線とするとき，線積分 $\displaystyle\int_\gamma \alpha$ を求めよ．

問 2.4　開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ で定義された関数 f の外微分 df に対し，C^1 曲線 $\gamma\colon [a,b] \to U$ に沿った df の積分は

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

で与えられる．これを証明せよ．

§2 $\mathbb{R}^n$ の開集合上の微分形式 (2)（つづき）

<u>Poincaré の補題</u>
$\mathbb{R}^n$ では，微分形式 α が閉形式（$d\alpha = 0$ をみたす）ならば完全形式である（$\alpha = d\beta$ と表される）．

➢ Poincaré の補題は「$\mathbb{R}^n$ では……」ではなく「単位開球 B^n では……」と述べられることも多い．$\mathbb{R}^n$ と B^n は互いに C^∞ 級微分同相だからどちらでも同じこと（問 2.2 による）．

一般的な証明は後の講義で行われると思う．ここでは 1 次微分形式の場合だけを扱う．

Poincaré の補題が問題にしているのは次のようなこと．たとえば，$\mathbb{R}^3$ で 1 次微分形式 $\alpha = (2 + yz^2)\,dx + xz^2\,dy + 2xyz\,dz$ は閉形式である（確かめよ）．ではこれは完全形式だろうか．すなわち，$\alpha = df$ となる関数 f は存在するだろうか．

一般に f の外微分 df は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

である．したがって前段落の α に対し $\alpha = df$ となる f を探すことは，偏微分方程式系

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + yz^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz$$

の解を探すということに他ならない．$f(x, y, z) = 2x + xyz^2$ がその解（の一つ）になっている．この f に気づけばよいのだが，システマティックに f をつくる方法はないだろうか．

問 2.5　次のようにして f をつくり，1 次微分形式に対する Poincaré の補題を証明することができる．

(1)　$g_1(x, y, z) = 2 + yz^2$，$g_2(x, y, z) = xz^2$，$g_3(x, y, z) = 2xyz$ に対し

$$\int_0^1 (xg_1(tx, ty, tz) + yg_2(tx, ty, tz) + zg_3(tx, ty, tz))dt = 2x + xyz^2$$

を確かめよ．

(2)　一般に，$\mathbb{R}^n$ の閉 1 次微分形式 α について

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_\gamma \alpha$$

とおく．ただし $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ を $\gamma(t) = (tx_1, \dots, tx_n)$ によって定義する．この f が $\alpha = df$ をみたすことを証明せよ．

問 2.6　問 2.1 の 1 次微分形式 α は閉形式だが，$\alpha = df$ をみたす $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の関数 f は存在しない．そのことを証明せよ．［ヒント：問 2.1，2.2，2.4 を使うとよい．］

問 2.7　［出典：M. P. do Carmo, *Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag, 1994 の p. 27*.］

授業で配布したプリントには，上記テキスト第 2 章演習問題の第 2 問の画像が載っています．Web 公開版からは削除しました．

*本演義ではこの本から多くの演習問題を借りてくる予定です．たとえば問 2.3 も実はそうでした．