§10　de Rham コホモロジー群 (2)

de Rham コホモロジー群を計算する上で基本的な 2 つの事実を紹介する．

多様体 M，N のあいだに二つの C^∞ 級写像 $f\colon M\to N$，$g\colon M\to N$ が与えられているとする．問題 9.2 で述べたように，これらは de Rham コホモロジー群のあいだに $f^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N)\to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$，$g^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N)\to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ という線型写像を誘導する．

いま，C^∞ 級写像 $F\colon M\times[0,1]\to N$ であって*，$F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=g(x)$ なるものが存在するとき，f と g は C^∞ **ホモトピック**だといい，ここでは $f\simeq g$ と書く．

定理　C^∞ 級写像 $f\colon M\to N$，$g\colon M\to N$ が C^∞ ホモトピックならば，これらが de Rham コホモロジー群のあいだに誘導する写像

$$f^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N)\to H^k_{\mathrm{dR}}(M),\qquad g^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N)\to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$$

は，すべての k について一致する．

この定理については，Lee†の 15 節，Tu‡の 27 節・29 節などを参考にせよ．

10.1　多様体 M，N が C^∞ **ホモトピー同値**であるとは，C^∞ 級写像 $f\colon M\to N$，$g\colon N\to M$ であって，$g\circ f\simeq \mathrm{id}_M$，$f\circ g\simeq \mathrm{id}_N$ なるものが存在することをいう．M と N が C^∞ ホモトピー同値であるとき，de Rham コホモロジー群のあいだに線型同型写像 $H^k_{\mathrm{dR}}(M)\cong H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ があることを証明せよ．

10.2　多様体 M とその部分多様体 N に対して，N が M の C^∞ **変位レトラクト**であるとは，以下の条件をみたす C^∞ 級写像 $F\colon M\times[0,1]\to M$ が存在することをいう§：$f_t(x)=F(x,t)$ とおくとき，$f_0=\mathrm{id}_M$，$f_1(M)\subset N$ で，かつ任意の t に対し $f_t|_N=\mathrm{id}_N$．

(1)　N が M の C^∞ 変位レトラクトならば，M と N は C^∞ ホモトピー同値である．理由を述べよ．

(2)　$n\geqq 2$ とする．S^{n-1}（単位 $n-1$ 次元球面）は $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ の C^∞ 変位レトラクトであることを示せ．

---

*写像 $F\colon M\times[0,1]\to N$ が C^∞ 級であるとは，$\varepsilon>0$ をうまくとって，F を C^∞ 級写像 $\tilde F\colon M\times(-\varepsilon,1+\varepsilon)\to N$ へと拡張できることだと約束する．

†J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, 2003.

‡L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Second Edition, Universitext, Springer, 2011.

§「C^∞ 強変位レトラクト」とよぶこともある．

次に，M を多様体とし，U，V を M の開集合であって $M = U \cup V$ であるようなものとする．以下では $U \cap V$，U，V，M という集合から得られる 4 個の包含写像

$$i_U : U \to M, \qquad i_V : V \to M,$$
$$j_U : U \cap V \to U, \qquad j_V : U \cap V \to V$$

を考える．これらを用いて次のように定義する．

$$(i_U^*, i_V^*) \colon H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^k_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(V), \qquad [\omega] \mapsto (i_U^*[\omega], i_V^*[\omega]),$$
$$j_U^* - j_V^* \colon H^k_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(V) \to H^k_{\mathrm{dR}}(U \cap V), \qquad ([\alpha], [\beta]) \mapsto j_U^*[\alpha] - j_V^*[\beta].$$

定理　各 k に対し**連結準同型**とよばれる線型写像 $\delta \colon H^k_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \to H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M)$ が存在して，次の列が完全列となる（**Mayer–Vietoris 完全列**）．

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} H^0_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^0_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} H^0_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \xrightarrow{\delta}$$
$$H^1_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} H^1_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} H^1_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \xrightarrow{\delta}$$
$$H^2_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} H^2_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^2_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} H^2_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \xrightarrow{\delta}$$
$$H^3_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} \cdots$$

δ の構成や完全性の証明については，Lee の 15 節，Tu の 25 節および 26 節などを見よ．

10.3　$n \geqq 1$ に対し，S^n の de Rham コホモロジー群が

$$H^k_{\mathrm{dR}}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0,\ n, \\ 0, & 0 < k < n \end{cases}$$

で与えられることを示せ．［ヒント：数学的帰納法．$U = S^n \setminus \{ (0, \ldots, 0, 1) \}$，$V = S^n \setminus \{ (0, \ldots, 0, -1) \}$ とおいて Mayer–Vietoris 完全列を用いる．］

10.4　$\mathbb{R}^n \setminus \{ p_1, p_2 \}$ の de Rham コホモロジー群を決定せよ．ここで p_1，p_2 は $\mathbb{R}^n$ の相異なる 2 点．

10.5　複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の de Rham コホモロジー群を決定せよ．

10.6　実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の de Rham コホモロジー群を，できるだけ大きな n まで決定せよ．