§1 $\mathbb{R}^n$ の開集合の微分形式 (1)

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U の微分 k 形式とは,

$$f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

という形の「もの」有限個からなる和である. ここで $f(x_1, \ldots, x_n)$ は U 上の C^∞ 級関数.

➢「『もの』とはいったい何か」というのが気にかかるが, ひとまず後回しにする. まずは計算練習をして, 少しずつ微分形式に実在感をもてるようにするのがよいと思う.

以下で現れる関数は, とくに断らなくても C^∞ 級とする.

微分形式を整理する際の計算規則

1. $0\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ は 0 である. 除去してよい.
2. $f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ と $g\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ という 2 つの項があれば, それらはまとめて $(f+g)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ としてよい.
3. 項 $f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ について, 隣り合う「dx_{i_l}」と「$dx_{i_{l+1}}$」の順番を入れ換え, 先頭に -1 倍をつけてもよい. たとえば $f\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 = -f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.
4. 項 $f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ の「$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$」部分に「$dx_j \wedge dx_j$」が現れていれば, その項は 0 である. たとえば

$$f\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \overset{\text{規則 } 3}{=} -f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 = 0.$$

外積 $\omega \wedge \eta$ の計算規則

1. 外積は $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 双線型性をもつ演算である.
2. $(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$.

外微分 $d\omega$ の計算規則

1. 外微分は $\mathbb{R}$ 線型性をもつ演算である.
2. $f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ の外微分は

$$d(f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

問 1.1　$\mathbb{R}^2$ の微分 1 形式 ω は一般に

$$\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

と表される．$\omega\wedge\omega$ および $d\omega$ を求めよ（整理された形にせよ）．

➢ 一般に，微分 1 形式 ω に対して $\omega\wedge\omega = 0$ となる．もっと一般に，微分 k 形式 ω と微分 l 形式 η に対して $\omega\wedge\eta = (-1)^{kl}\eta\wedge\omega$ である．

問 1.2　$\mathbb{R}^3$ の微分形式

$$\omega = y\,dx - x\,dy,\qquad \eta = z\,dx\wedge dy + x\,dy\wedge dz,\qquad \zeta = z\,dy$$

について，$\omega\wedge\eta$，$\omega\wedge\zeta$，$\eta\wedge\zeta$ を求めよ．

問 1.3　問 1.2 の微分形式について $d\omega$，$d\eta$，$d\zeta$ を求めよ．

問 1.4　問 1.2 の微分形式について $d(\omega\wedge\zeta)$ と $d\omega\wedge\zeta - \omega\wedge d\zeta$ を求め，両者を比較せよ．

➢ 一般に，微分 k 形式 ω と微分 l 形式 η に対して $d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta$ である．

問 1.5　n を 1 以上の整数とする．$\mathbb{R}^{2n}$ の微分 2 形式

$$\omega = dx_1\wedge dx_2 + dx_3\wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1}\wedge dx_{2n}$$

について，$\underbrace{\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega}_{n\text{ 個}}$ を求めよ．

問 1.6　$\mathbb{R}^3$ におけるベクトル解析は微分形式を用いて再解釈される．以下 $\mathbb{R}^3$ で考える．

(1)　微分 0 形式とは関数のことである．微分 0 形式（関数）f の外微分 df を dx，dy，dz を用いて表せ．また次の微分 1 形式 ω，微分 2 形式 η の外微分を計算せよ：

$$\omega = g_1\,dx + g_2\,dy + g_3\,dz,\qquad \eta = h_1\,dy\wedge dz + h_2\,dz\wedge dx + h_3\,dx\wedge dy.$$

(2)　次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
\{\text{関数}\} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, equal] & \{\text{ベクトル場}\} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\Phi_1"] & \{\text{ベクトル場}\} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\Phi_2"] & \{\text{関数}\} \arrow[d, "\Phi_3"] \\
\{\text{微分 0 形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{微分 1 形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{微分 2 形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{微分 3 形式}\}.
\end{tikzcd}$$

ここで横向きの写像はすべて定義されているが，Φ_1，Φ_2，Φ_3 は未定義である．上の図式が可換になるようにするためには，Φ_1，Φ_2，Φ_3 をどう定義したらよいか．