7 月 13 日の講義の補足

講義で「行列の簡約化の一意性」の証明をしましたが，最後の部分の説明が言葉足らずだったので，補足をしたいと思います．

定理 11.2　行列 A の簡約化 B は，具体的な簡約化の手続きに依存せず，一意的に決まる．

補題　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ に基本変形を何回か施して行列 $A' = (\boldsymbol{a}'_1\ \boldsymbol{a}'_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}'_n)$ が得られるとする．そのとき，任意の $j, j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ と $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{a}_j = c_1\boldsymbol{a}_{j_1} + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_{j_k}$$

が成り立つことと

$$\boldsymbol{a}'_j = c_1\boldsymbol{a}'_{j_1} + \cdots + c_k\boldsymbol{a}'_{j_k}$$

が成り立つことは同値.

補題を用いて定理 11.2 の証明を与える．

$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ をある方法で簡約化して $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n)$ が得られるとする．B が簡約な行列であることから，主成分を含む列を $\boldsymbol{b}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{j_r}$ $(1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n)$ とすれば，

(i)　各 $\boldsymbol{b}_{j_s}$ $(s = 1, \ldots, r)$ は，それより左側にある列の一次結合として表すことはできない．

(ii)　$j_1, \ldots, j_r$ のいずれとも異なる $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対しては，列 $\boldsymbol{b}_j$ はそれより左側にある列の一次結合として表すことができる．さらに詳しく言えば，$\boldsymbol{b}_j$ よりも左側にある $\boldsymbol{b}_{j_s}$ たちだけを用いた一次結合として表すことができ，その場合の表し方は一意的である．

上述の補題によって，(i) と (ii) は $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ に対してもまったく同様に成り立つ．すなわち

(i′)　各 $\boldsymbol{a}_{j_s}$ $(s = 1, \ldots, r)$ は，それより左側にある列の一次結合として表すことはできない．

(ii′)　$j_1, \ldots, j_r$ のいずれとも異なる $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対しては，列 $\boldsymbol{a}_j$ はそれより左側にある列の一次結合として表すことができる．さらに詳しく言えば，$\boldsymbol{a}_j$ よりも左側にある $\boldsymbol{a}_{j_s}$ たちだけを用いた一次結合として表すことができ，その場合の表し方は一意的である．

上記の (i′), (ii′) により，B の主成分を含む列の番号 $j_1, \ldots, j_r$ は，行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ を構成する列のうち「それより左側にある列の一次結合として表すことができない」列の番号に一致することがわかる．また $j_1, \ldots, j_r$ のいずれとも異なる $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$\boldsymbol{b}_j$ を

$$\boldsymbol{b}_j = c_1\boldsymbol{b}_{j_1} + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_{j_k} \qquad (\boldsymbol{b}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{j_k} \text{ は } \boldsymbol{b}_j \text{ より左側にある } \boldsymbol{b}_{j_s} \text{ の全体})$$

と表したときの係数 $c_1, \ldots, c_k$ は，補題により，$\boldsymbol{a}_j = c_1\boldsymbol{a}_{j_1} + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_{j_k}$ としたときの係数 $c_1, \ldots, c_k$ に一致している．以上の情報によって B は完全に確定する——つまり，B を完全に確定するための情報は，A からすべて読み取ることができる．したがって，簡約化 B は具体的な簡約化の仕方には依存せず，A によって一意的に決定される．