第 2 回の演習問題

1. 講義中の定理 2.1 の証明を次のようにして与えよ．
   (1) 行列 A およびベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の成分を具体的に
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
   とおいて，$T_A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$ と $T_A(\boldsymbol{x}_1)+T_A(\boldsymbol{x}_2)$ をそれぞれ計算することにより，$T_A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) = T_A(\boldsymbol{x}_1) + T_A(\boldsymbol{x}_2)$ を示せ．
   (2) 同じようにして，$T_A(c\boldsymbol{x}) = cT_A(\boldsymbol{x})$ を示せ．

2. 次の行列の積を計算せよ．
   (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. xy 平面において，原点を中心として，x 軸を角 θ だけ回転した直線を l_θ とする．直線 l_θ に関する折り返し（平面上の点を l_θ に関して線対称な位置に写す操作）を T_θ とする．平面上の点をベクトルと同一視することにより T_θ を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像とみなすと，これは $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像となる．線形写像 T_θ を表す 2 次正方行列 A を求めよ．

解答例

1.

(1)　$T_A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ と $T_A(\boldsymbol{x}_1) + T_A(\boldsymbol{x}_2)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} T_A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix}, \\ T_A(\boldsymbol{x}_1) + T_A(\boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから，$T_A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T_A(\boldsymbol{x}_1) + T_A(\boldsymbol{x}_2)$ が成り立つ.

(2)　省略.

2.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$

3.　定理 2.2 の証明によれば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が線形写像 T_θ によってどのようなベクトルに写るか求めて，結果として得られたベクトルを並べたものが，線形写像 T_θ を表す行列 A である．図形的考察により

$$T_\theta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \qquad T_\theta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

だから

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

となる.

あるいは次のように考えることもできる．まず x 軸に関する折り返しを表す行列を考えると，それは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である.「直線 l_θ に関する折り返し」という操作は「角 $-\theta$ 回転」「x 軸に関する折り返し」「角 θ 回転」の 3 つの操作をこの順に施したものに一致するので，行列 A は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

という行列の積に一致する（操作を施す順番と行列の登場する順番が逆転することに注意せよ）．これを計算して

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

を得る.