§10　距離空間

必修問題

10.A　$\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し，$p \geq 1$ について

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

また

$$\|x\|_\infty = \max \{ \, |x_i| \mid 1 \leq i \leq n \, \}$$

とおき，$\mathbb{R}^n$ の 2 元 $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p \quad (p \geq 1), \qquad d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$$

と定める．

(1)　$d_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ．（実際には，すべての p に対して d_p は距離になっている．）

(2)　$n = 2$ の場合について考える．距離 d_p に関する（ここで $p \geq 1$ または $p = \infty$ とする[*]）原点 $0 \in \mathbb{R}^2$ を中心とする半径 1 の開球体 $U(0, 1)$ とは

$$U(0, 1) = \{ \, x \in \mathbb{R}^2 \mid d_p(0, x) < 1 \, \} = \{ \, x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p < 1 \, \}$$

という集合のことである．$p = 1, 2, 3, \infty$ の各々の場合について，$U(0, 1)$ の概形を図示せよ．（理由は特に説明しなくてよい．また，一つの図の中に重ねて描いてよい．）

10.B　p を素数とし，関数 $d_p \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$d_p(m, n) = p^{-e_p(m-n)}.$$

ただし

$$e_p(N) = \begin{cases} (N \text{ が } p^e \text{ で割り切れるような最大の非負整数 } e) & (N \neq 0 \text{ のとき}) \\ \infty & (N = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定め，$p^{-\infty}$ とは 0 のことと解釈する．d_p が $\mathbb{Z}$ 上の距離であることを示せ（p 進距離）．

任意提出問題

10.1　距離空間 (X, d) において，$a \in X$ を中心とする半径 r の開球体 $U(a, r)$ が開集合であることを示せ．また，任意の 2 つの開集合 U_1, U_2 に対し，$U_1 \cap U_2$ も開集合であることを示せ．

10.2　距離空間 (X, d) が完備であるとはどういうことか，（調べて）説明せよ．また，完備でない距離空間 (X, d) の例を挙げよ．

---

[*] これを「$1 \leq p \leq \infty$」と書いてしまうこともある．