§9　順序集合 (2)

必修問題

9.A

(1)　帰納的順序集合の定義を述べよ．

(2)　V を体 K 上の（有限次元とは限らない）ベクトル空間とし，冪集合 $\mathscr{P}(V)$ の部分集合

$$\mathscr{B} = \{\, X \in \mathscr{P}(V) \mid \text{任意の有限個の元 } \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in X \text{ は一次独立} \,\}$$

を考える．集合の包含関係 $\subset$ によって $\mathscr{B}$ を順序集合と見なす．$(\mathscr{B}, \subset)$ が帰納的順序集合であることを示せ．

9.B

(1)　$(X, \leq)$ を整列集合とし，A を

$$a \in A,\ x \in X,\ x \leq a \quad \Rightarrow \quad x \in A \tag{$\star$}$$

という性質を持つ X の部分集合とする．A が X のある切片に一致することを示せ．

(2)　$(X, \leq)$ が整列集合でない場合には，A が上記の性質 $(\star)$ を満たしていても，$A = \{\, x \in X \mid x < a \,\}$ となるような $a \in A$ が存在するとは限らない．そのことを示す順序集合 $(X, \leq)$ および A の例を挙げよ．

任意提出問題

9.1　問題 9.A の結論と Zorn の補題を用いて，任意のベクトル空間が基底を持つことを証明せよ．なお，その中で，有限次元とは限らない一般のベクトル空間の「基底」とは何かということも正確に述べること．

9.2　$\mathbb{R}$ を体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と見なすと，問題 9.1 によって $\mathbb{R}$ は基底 B を持つ．基底 B は必ず非可算集合であることを示せ．

9.3　順序集合 $(X, \leq)$ の**降鎖**とは，X の元の列 $\{\, x_n \,\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって，任意の n に対し $x_n > x_{n+1}$ であるようなもののことをいう．A が全順序集合であるとき，A が整列集合であるための必要十分条件は，A が降鎖を持たないことである．そのことを示せ．選択公理を（用いるならば）正確に用いること．