§7　集合の濃度 (2)

今回の問題のうちのいくつかでは Bernstein (ベルンシュタイン) の定理を用いることになる．もちろん自由に用いてよいのだが，当然ながら，利用する箇所ではそのことを明示すること．

可算の濃度を $\aleph_0$，連続の濃度を $\aleph$ で表す．

必修問題

7.A　濃度に関する分配法則 $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p} + \mathfrak{n}\mathfrak{p}$ を証明したい．

(1)　$\mathfrak{m} = |A|, \mathfrak{n} = |B|$ であるような集合 A, B を，さらに $A \cap B = \emptyset$ を満たすようにとることができる．理由を説明せよ．

(2)　$(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p} + \mathfrak{n}\mathfrak{p}$ を示せ．

7.B　$\aleph + \aleph_0 = \aleph$ を証明せよ．［ヒント：$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$ かつ $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ だから，あとは $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ が連続の濃度 $\aleph$ を持つことを証明すればよい．］

任意提出問題

7.1　0 でない濃度 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ ならば $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$ であることを示せ．

［コメント：ここで「0 でない」という仮定をおいたのは，そもそも濃度の冪 $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ を定義する際に，0 でないような濃度 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ だけを考えることにしたからである*．］

7.2　$a < b$ とする．4 個の区間

$$[a, b], \quad [a, b), \quad (a, b], \quad (a, b)$$

がすべて連続の濃度 $\aleph$ を持つことを証明せよ．

7.3　濃度の積 $\aleph_0\aleph$ が $\aleph$ に等しいことを証明せよ．［ヒント：前問の結果を用いる．または $\aleph\aleph = \aleph$ を既知としてそれを用いてもよい．］

7.4　濃度の冪 $\aleph_0^{\aleph_0}$ が $\aleph$ に等しいことを証明せよ．なお，濃度の演算に関する一般的な諸法則を用いてよい．また $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$ および $2^{\aleph_0} = \aleph$ を既知としてよい．［ヒント：問題 7.1 の結果から $\aleph = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$ がわかる．逆をどうするかが問題．］

*少なくとも，森田茂之『集合と位相空間』ではそうなっている．