§6　集合の濃度 (1)

必修問題

6.A　集合 A, B, C, D の濃度の間に $|A| \le |B|, |C| \le |D|$ という関係があるとする．そのとき，$|A \times C| \le |B \times D|$ であることを示せ．

6.B　可算の濃度 $\aleph_0$ が最小の無限濃度であることを証明したい．示すべきことは，X を無限集合とするとき，単射 $f\colon \mathbb{N} \to X$ が必ず存在するということである．

この問題は，森田茂之『集合と位相空間』に「章末問題 1.5」として挙げられている．その「略解」を一部改変して以下に示す．なお，ここでは $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ としている．

> X の有限部分集合の全体からなる集合を $\mathscr{F}(X)$ とする．このとき，任意の $A \in \mathscr{F}(X)$ に対し $A^c \neq \emptyset$ となる．ここで選択公理を使えば，ある選択関数
>
> $$\varphi\colon \mathscr{F}(X) \to \bigcup_{A \in \mathscr{F}(X)} A^c$$
>
> が存在する．そこで，$f(1) = \varphi(\emptyset), f(2) = \varphi(\{f(1)\}), f(3) = \varphi(\{f(1), f(2)\}), \dots$ とおけば $f\colon \mathbb{N} \to X$ は単射となる．

上記の証明を，次に指摘する 2 つの疑問に対する答えが明らかになるように書き直せ．

(i)　第 3 文に「ここで選択公理を使えば，……が存在する」とあるが，選択公理をどのように適用しているのか．

(ii)　第 4 文に「そこで，……とおけば $f\colon \mathbb{N} \to X$ は単射となる」とあるが，ここに書かれている無限に続く操作は，どのようにして正当化されるか．

任意提出問題

6.1　集合 A, A', B, B' に対し，$|A| = |A'|$ かつ $|B| = |B'|$ のとき，$|B^A| = |B'^{A'}|$ を示せ．ただし，一般に集合 A, B に対し，B^A は A から B への写像全体の集合を表す．

6.2　半開区間 $[0, 1)$ に属する実数のうち，「0」と「1」だけを用いて十進小数表示できるようなもの全体の集合を A とする．A が非可算集合であることを示せ．

［ヒント：Cantor（カントール）の対角線論法．なお，証明とはさほど関係ないと思うが，集合 A についての認識をはっきりさせるため，いくつかの例にふれておく．たとえば $0, 1/10 = 0.1$, $1/9 = 0.111\cdots$, $101/999 = 0.101101101\cdots$ はすべて A に属する．また

$$0.\underbrace{1}_{1\text{個}}\underbrace{01}_{2\text{個}}\underbrace{001}_{3\text{個}}\underbrace{0001}_{4\text{個}}\cdots\underbrace{00\cdots01}_{n\text{個}}\cdots$$

は A に属する無理数の例である（これが無理数なのはなぜか？）．］

6.3　任意の無限濃度 $\mathfrak{m}$ に対し $\mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$ であることを示せ．［ヒント：問題 6.B を用いる．］