§4 全射，単射

必修問題

4.A A, B, C を集合とし，2 つの写像 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ を考える．

(1) $g \circ f$ が全射で g が単射ならば，f は全射であることを示せ．

(2) $g \circ f$ が単射で f が全射ならば，g は単射であることを示せ．

4.B 次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ への全単射は存在する．例を一つ挙げよ．（それが全単射になっている理由は特に説明しなくてよい．）［ヒント：0 以上の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書くことにすれば，全単射 $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ が存在することは簡単にわかるだろう．］

(2) 連続な全射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は存在しないことを証明せよ．

任意提出問題

4.1 2 つの写像 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ を考える．

(1) $g \circ f$ が全単射であるとする．そのとき，f は単射，g は全射であることを示せ．

(2) (1) の逆は成り立つか．すなわち，f が単射で g が全射であるとき，$g \circ f$ は全単射であるといえるか．

4.2 写像 $f\colon A \to B$ について，次の 3 条件が同値であることを示せ．

(a) f は単射．

(b) A の任意の部分集合 U, V について $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$ が成り立つ．

(c) A の任意の部分集合 U について $f^{-1}(f(U)) = U$ が成り立つ．

4.3 写像 $f\colon A \to B$ について，次を証明せよ．

(1) f が単射であるための必要十分条件は，f が左逆写像を持つことである．

(2) f が全射であるための必要十分条件は，f が右逆写像を持つことである．

ただし，f の左逆写像とは $g \circ f = \mathrm{id}_A$ を満たすような写像 $g\colon B \to A$ のことで，f の右逆写像とは $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすような写像 $g\colon B \to A$ のことである．

［ヒント：どちらかで選択公理を用いる．］

4.4 全射連続写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ は存在するだろうか．ただし，写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ が連続であるというのは，$i\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2$ を包含写像とするとき，$g = i \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が連続であること，すなわち $g(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}))$ と書いたときに各 $g_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ がいずれも連続であることをいうものと約束する[*]．

---

[*] 位相空間論の用語を用いていえば，$\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ に $\mathbb{R}^2$ の位相から定まる相対位相を与えることにより，写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ の連続性を定義している．詳しくは後期の「幾何学基礎 2」で勉強しましょう．