§3　写像

必修問題

3.A　写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ によって定義する．次に挙げる像や逆像はどのような集合か．わかりやすい形に書き直せ．

(1)　$f((2,3))$　(2)　$f((-1,1))$　(3)　$f^{-1}((2,4))$　(4)　$f^{-1}((-1,2))$

(5)　$f^{-1}(2)$　(6)　$f^{-1}(-1)$

（ただし (5), (6) における $f^{-1}(a)$ という記号は，集合 $\{a\}$ の逆像 $f^{-1}(\{a\})$ のことを表している．f の逆写像 f^{-1} が存在する場合は紛らわしいが，よく使われる記号である．）

3.B　X, Y を集合とし，写像 $f\colon X \to Y$ について考える．

(1)　一般に，X の部分集合 A に対し $f(A^c) = f(A)^c$ は成り立つか．（ただし $A^c, f(A)^c$ はそれぞれ $X \setminus A, Y \setminus f(A)$ を表すものとする．）

(2)　一般に，Y の部分集合 B に対し $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ は成り立つか．（ただし B^c, $f^{-1}(B)^c$ はそれぞれ $Y \setminus B, X \setminus f^{-1}(B)$ を表すものとする．）

任意提出問題

3.1　$f\colon A \to B$ を写像とし，U を A の部分集合，V を B の部分集合とする．次は常に成り立つか．

(1)　$U \subset f^{-1}(f(U))$　(2)　$U \supset f^{-1}(f(U))$

(3)　$f(f^{-1}(V)) \subset V$　(4)　$f(f^{-1}(V)) \supset V$

3.2　$f\colon X \to Y$ を写像とし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 Λ によって添字づけられた X の部分集合族とする．そのとき，

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

は一般には成り立たない．反例を挙げよ．

3.3　$f\colon A \to B$ を写像とする．また，U を A の部分集合とし，$f|_U$ を f の U への制限とする．B の任意の部分集合 V に対し，$(f|_U)^{-1}(V) = U \cap f^{-1}(V)$ であることを示せ．

3.4　複素数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $M(n;\mathbb{C})$ と書く．行列の指数関数 $\exp\colon M(n;\mathbb{C}) \to M(n;\mathbb{C})$ を考える：

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

H を n 次 Hermite 行列全体のなす $M(n;\mathbb{C})$ の部分集合とするとき，H の exp による像 $\exp(H)$ はどんな集合か．