§1　論理の基礎，数学的文章の書き方

必修問題

1.A　次の命題の否定命題を日本語の文で書き表せ．表現の仕方は，誤解が生じない範囲で自由に工夫してよい．ただし「……でない」という否定表現は用いないこと．

(1)　「任意の実数 x に対して，$x^2 \geq 0$ である．」
（参考：論理記号では $\forall x \in \mathbb{R}\,(x^2 \geq 0)$ などと書く．）

(2)　「実数 x が $x^2 \geq 1$ を満たすならば $x \geq 1$ である．」
（参考：論理記号では $\forall x \in \mathbb{R}\,(x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1)$ などと書く．）

(3)　「任意の実数 x に対して，$x + y = 1$ を満たすような実数 y が存在する．」
（参考：論理記号では $\forall x \in \mathbb{R}\,\exists y \in \mathbb{R}\,(x + y = 1)$ などと書く．）

(4)　「どんな正の有理数よりも小さいような正の実数が存在する．」
（参考：論理記号では $\exists x \in \mathbb{R}\,(x > 0 \land (\forall y \in \mathbb{Q}\,(y > 0 \Rightarrow x < y)))$ などと書く．）

1.B　自然数 a, b に対し，$\sqrt[b]{a}$ は自然数にならない限り無理数である（ここでは「自然数」とは 1 以上の整数のこととする*）．この事実の証明を，文章の形にまとめることにしようと思う．読者としては，高校までは数学をそれなりに真面目に勉強したが，しかしかなり忘れてしまった大人を想定することにした．

次のように，3 段落構成にしよう．このプランに従って，証明を述べた文章を書け．

［第 1 段落］　何を証明するのか説明する．$\sqrt[b]{a}$ の定義や無理数の定義にも簡潔に触れる．そして，証明すべきことが「a, b, m, n が自然数で，m と n が互いに素であるとき，$an^b = m^b$ が成り立つならば，n は 1 でなければならない」という主張であること（または同等のことを別の形で表現してもよい）を説明する．

［第 2 段落］　自然数の素因数分解の一意性を用いて証明することにしよう．そのことを宣言する．読者は「素因数分解の一意性」について耳にしたことはあるだろうが，よく思い出せないかもしれないし，あるいは自分と読者の間で理解の仕方にずれがあるかもしれない．そこでこの段落では，証明に用いる「素因数分解の一意性」の主張内容について，明確に説明する．

［第 3 段落］　本論に戻り，第 1 段落で述べた主張の証明を与え，文章を完結させる．

任意提出問題

1.1　問題 1.A の各命題について，その真偽を述べよ．（当然だが，理由も説明すること．）

1.2　任意の集合 X に対し，空集合 $\emptyset$ は X の部分集合になっている．このことを証明せよ．
［ヒント：2 つの集合 A, B について，A が B の部分集合であるというのは，任意の $x \in A$ に対して $x \in B$ でもあるということだった．記号で書けば $\forall x \in A\,(x \in B)$ が真であるということだが，これはまた $\forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ が真であることだといってもよい．］

* 0 を自然数に含めることもよくある．注意しよう．