問題 1.B の解答例

自然数（ここでは正整数のこと）a, b に対し，$\sqrt[b]{a}$ は自然数でなければ無理数であることを証明する．ここで $\sqrt[b]{a}$ とは $x^b = a$ を満たす正の実数 x のことであり，また無理数とは，有理数でない実数，すなわち整数同士の商として表すことのできない実数のことだった．さて，証明すべき主張は，対偶をとることにより「自然数 a, b に対し，$\sqrt[b]{a}$ が有理数であれば自然数である」という形に言い換えられる．もし $\sqrt[b]{a}$ が有理数であるとすれば，特に，互いに素な自然数 m, n によって $\sqrt[b]{a} = m/n$ と表すことができる．このときさらに $an^b = m^b$ が従う．$\sqrt[b]{a} = m/n$ が自然数となるのは $n = 1$ のときなので,

$$\text{自然数 } a, b \text{ および互いに素な自然数 } m, n \text{ が } an^b = m^b \text{ を満たすとき，} n = 1 \text{ である} \qquad (\star)$$

ということを証明すれば，目標が達せられることになる．

証明にあたり，自然数の素因数分解の一意性を利用する．2 以上の自然数は必ず有限個の素数の積として表すことができ，これを素因数分解というが（1 は「素数ゼロ個の積」と考えることもできるが，ここでは使わないので除外して考える），そのような積としての表示が，素数の順番の違いを除いて一通りしかないという事実が「素因数分解の一意性」である．より正確には次のように述べられる.「N を 2 以上の自然数とし，これが

$$N = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} = {p'_1}^{e'_1} {p'_2}^{e'_2} \cdots {p'_l}^{e'_l}$$

と 2 通りに素因数分解されているとする（ここで k, l は自然数，$p_1, p_2, \ldots, p_k$ は相異なる素数，$p'_1, p'_2, \ldots, p'_l$ も相異なる素数で，各 e_i, e'_j は自然数）．そのとき必ず $k = l$ であって，しかも ${p'_1}^{e'_1}$, ${p'_2}^{e'_2}, \cdots, {p'_k}^{e'_k}$ の順番を適切に入れ換えれば，すべての $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し $p_i = p'_i$ かつ $e_i = e'_i$ となるようにすることができる.」

それでは，初めの段落で述べた命題 $(\star)$ を証明する．自然数 a, b および互いに素な自然数 m, n が $an^b = m^b$ を満たすとする．$n \neq 1$ であると仮定しよう．そのとき n を割り切る素数 p が少なくとも一つ存在し，an^b は p の倍数となるから，いったん $an^b = pq$ とおいて q を素因数分解することにより，an^b は

$$an^b = p^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} \quad (p, p_2, \ldots, p_k \text{ は相異なる素数，各 } e_i \text{ は自然数}) \qquad (*)$$

と素因数分解されることがわかる．一方で m が ${p'_1}^{e'_1} {p'_2}^{e'_2} \cdots {p'_l}^{e'_l}$（$p'_1, p'_2, \ldots, p'_l$ は相異なる素数，各 e'_j は自然数）と素因数分解されるとすると

$$m^b = {p'_1}^{be'_1} {p'_2}^{be'_2} \cdots {p'_l}^{be'_l} \qquad (**)$$

である．ここで $N = an^b = m^b$ の素因数分解が一意的であることから，$(*)$ の右辺に現れる素数 p は，$(**)$ の右辺に現れる l 個の素数 $p'_1, p'_2, \ldots, p'_l$ のいずれかと一致していなければならない．したがって特に，$m = {p'_1}^{e'_1} {p'_2}^{e'_2} \cdots {p'_l}^{e'_l}$ は p の倍数であることになる．しかしこれは，m と n が互いに素であることに矛盾する．ゆえに，$n \neq 1$ となることはあり得ず，n は 1 でなければならない．これで証明が完成した．