§10 必修問題の解説

問題 10.A

（スペースの都合で問題文を短く書き換えました.）
$\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1), \qquad \|x\|_\infty = \max\{\,|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\,\}$$

とおき，$\mathbb{R}^n$ の 2 元 $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p \quad (p \geq 1), \qquad d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$$

と定める.

(1) $d_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}^n$ 上の距離であることを示せ.

(2) $n = 2$ の場合について考える．$p = 1, 2, 3, \infty$ の各々に対して，距離 d_p に関する原点 $0 \in \mathbb{R}^2$ を中心とする半径 1 の開球体 $U(0, 1)$ の概形を図示せよ.

解答例

(1) <u>正値性</u>　$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ であるが，ここで各 i について $|x_i - y_i| \geq 0$ だから，一般に $d_1(x, y) \geq 0$ である．また,

$$\begin{aligned} d_1(x, y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{すべての } i \text{ について } |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{すべての } i \text{ について } x_i = y_i \quad \Leftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

<u>対称性</u>　$d_1(x, y) = d_1(y, x)$ とは $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$ ということだが，これは $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ より成り立つ.

<u>三角不等式</u>　任意の $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\begin{aligned} d_1(x, z) = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| = d_1(x, y) + d_1(y, z). \end{aligned}$$

(2) 略.（授業で説明します.）

コメント

(1) の「正値性」に関して，チェックすべき項目「$d_1(x, y) \geq 0$」「$x = y$ ならば $d_1(x, y) = 0$」「$d_1(x, y) = 0$ ならば $x = y$」のうちいくつかが漏れるケースが目立ちました．通常は 3 番目の性質が本質的な問題となりますが，他もまったく無視していいわけではありません.

問題 10.B

（こちらも問題文を少しだけ書き換えています．）

p を素数とし，関数 $d_p\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を $d_p(m,n)=p^{-e_p(m-n)}$ によって定義する．ただし

$$e_p(N)=\begin{cases}(N \text{ が } p^e \text{ で割り切れるような最大の非負整数 } e) & (N\neq 0 \text{ のとき})\\ \infty & (N=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

と定め，$p^{-\infty}$ とは 0 のことと解釈する．d_p が $\mathbb{Z}$ 上の距離であることを示せ．

解答例

<u>正値性</u>　$m\neq n$ のときは $e_p(m-n)$ は非負整数なので $d_p(m,n)=p^{-e_p(m-n)}>0$，$m=n$ のときは $e_p(m-n)=\infty$ なので $d_p(m,n)=p^{-e_p(m-n)}=p^{-\infty}=0$．よって一般に $d_p(m,n)\geq 0$ であり，$m=n$ ならば $d_p(m,n)=0$ で，また $d_p(m,n)=0$ となるのはその場合に限られる．

<u>対称性</u>　一般に $d_p(m,n)=d_p(n,m)$ であることを示すのだが, そのためには $e_p(m-n)=e_p(n-m)$ を確認すればよい．$m=n$ のときは両辺とも ∞ であり，この等式は正しい．そこで以下では $m\neq n$ として議論する．

$e=e_p(m-n)$ とおくと，$m-n$ は $p^e a$（ただし a は p で割り切れない）と表される．すると $n-m=p^e\cdot(-a)$ であるが，$-a$ は p で割り切れないので，これは $e_p(n-m)=e$ であることを意味している．ゆえに $e_p(m-n)=e_p(n-m)$ が成り立つ．

<u>三角不等式</u>　まず, 一般に $x,y\in\mathbb{Z}$ に対して $e_p(x+y)\geq\min\{e_p(x),e_p(y)\}$ であることを確かめる．（ただしここで, 任意の $e\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ に対し，$\min\{\infty,e\}=e$ と定め，また $\infty\geq e$ であると解釈する．）x と y がいずれも 0 でないときは, $e=e_p(x), e'=e_p(y)$ とおくと, x が p^e で割り切れ y が $p^{e'}$ で割り切れることから $x+y$ は $p^{\min\{e,e'\}}$ で割り切れるので，$e_p(x+y)\geq\min\{e,e'\}$ である．$x=0$ または $y=0$ のときは, たとえば $x=0$ とすると, 示すべき不等式は $e_p(y)\geq\min\{\infty,e_p(y)\}$ となり，右辺は $e_p(y)$ に等しいからこれは自明に成り立つ．$y=0$ の場合も同様である．

上の結果を用いて d_p に対する三角不等式を示す．$m,n,k\in\mathbb{Z}$ に対し，$m-k=(m-n)+(n-k)$ に注意すると

$$d_p(m,k)=p^{-e_p(m-k)}\leq p^{-\min\{e_p(m-n),e_p(n-k)\}}\leq p^{-e_p(m-n)}+p^{-e_p(n-k)}=d_p(m,n)+d_p(n,k).$$

コメント

正値性と対称性についてはあまり細かい指摘はしないことにしたので，自分でよく確認してください（特に，正値性に関して指摘すべき点に漏れはないか）．

三角不等式の証明がこの問題の中心的な内容です．上記の解答例のように $e_p(x+y)\geq\min\{e_p(x),e_p(y)\}$ であることに気づけばいいのですが，そうでなくても $e_p(m-n), e_p(n-k)$ の値やその大小に応じて丁寧に場合分けして考えればよいです．（$e_p(m-k)$ の値に着目して場合分けしようというのは，あまり見通しのよい方法ではないと思う．初めに思いついた考えに飛びつかず，他の方向性もよく検討してください．）

なお,「$e_p(x+y)=\min\{e_p(x),e_p(y)\}$」とした人もいましたが，これは誤りです（ほとんどの x,y については成り立つという印象を持つと思いますが）．不都合が起こるのは $e_p(x)=e_p(y)$ のときです．これについては例を挙げたほうがいいでしょう．$p=3$ とし，$x=18=2\cdot 3^2$ と $y=36=4\cdot 3^2$ を考えてみると，$e_3(18)=e_3(36)=2$ ですが，$e_3(18+36)=e_3(54)=3$ となります．