§7 必修問題の解説

問題 7.A

濃度に関する分配法則 $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}+\mathfrak{n}\mathfrak{p}$ を証明したい．

(1) $\mathfrak{m} = |A|, \mathfrak{n} = |B|$ であるような集合 A, B を，さらに $A \cap B = \emptyset$ を満たすようにとることができる．理由を説明せよ．

(2) $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}+\mathfrak{n}\mathfrak{p}$ を示せ．

解答例

(1) $\mathfrak{m} = |A'|, \mathfrak{n} = |B'|$ であるような集合 A', B' をとる．そして $A = \{0\} \times A', B = \{1\} \times B'$ と定める．第 2 成分への射影 $A = \{0\} \times A' \to A'$ は全単射だから $|A| = |A'|$ で，同様に $|B| = |B'|$．したがって $|A| = \mathfrak{m}, |B| = \mathfrak{n}$ となる．さらに $A \cap B = \emptyset$ が成立する．

(2) 集合 A, B, C を $\mathfrak{m} = |A|, \mathfrak{n} = |B|, \mathfrak{p} = |C|$，かつ $A \cap B = \emptyset$ となるようにとる．そのとき

$$|(A \cup B) \times C| = (\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} \tag{$*$}$$

であって，さらに $A \cap B = \emptyset$ より $(A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$ であることから

$$|(A \times C) \cup (B \times C)| = \mathfrak{m}\mathfrak{p}+\mathfrak{n}\mathfrak{p} \tag{$**$}$$

となっている．ところで，集合の等式 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つから，$(*)$ と $(**)$ の左辺は互いに等しい．ゆえに $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}+\mathfrak{n}\mathfrak{p}$ である．

コメント

集合の濃度の「定義」からは一歩進んで，「基本的な演算法則」の証明の一部を確認する問題でした．今学期のこれまでの授業の内容と比べて，ぐっと抽象度が上がっています．その波に乗れている人と翻弄されている人がくっきりと分かれていると感じました．

まず (1) について，細かい点を 2 点．

- 「$\mathfrak{m} = |A|, \mathfrak{n} = |B|$ となる集合 A, B がすでに与えられている」という状況から出発している人がしばしば見受けられましたが，おかしいと思う．そのような集合 A, B が「とれる」のはいいけれど，「もうとってある」とは問題文は言っていません．
- 「$\mathfrak{m} = |A'|, \mathfrak{n} = |B'|$ であるような集合 A', B' をとる．$A' \cap B' = \emptyset$ であれば $A = A', B = B'$ とすればよい．そうでなければ……」という説明をする人がたくさんいました．論理的には問題ないですが，別に $A' \cap B' = \emptyset$ の場合を特別扱いする必要はなく，$A' \cap B' = \emptyset$ であろうがなかろうが，$A = \{0\} \times A', B = \{1\} \times B'$ で大丈夫ですよね．よいでしょうか．それを認識した上で，あえて（何らかの考えがあって）$A' \cap B' = \emptyset$ の場合を特別扱いするのはかまわないんですが，とにかく認識はすべき．

(2) については次の指摘をしておきたいと思います．解答例では集合の一致「$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$」を根拠としましたが，「$(A \cup B) \times C$ から $(A \times C) \cup (B \times C)$ への写像

$f\colon (A\cup B)\times C \to (A\times C)\cup(B\times C)$ を $f(x,y)=(x,y)$ によって定めると……」という議論もよく見られました．これも問題はない．実質的にはほとんど同じことです．しかし写像 f を上のように「定義した」場合，「f がちゃんと定義されること」，すなわち「$(x,y)\in(A\cup B)\times C$ ならば $(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$ であること」がほんの少しだけ非自明であることに注意してください．f が全単射であることを確認していた人はたくさんいましたが，それなら同時に「f がちゃんと定義されること」も確認しないと，バランスを欠いた印象を与えます（「何がどのくらい非自明なのかについて，この書き手の認識は甘い」という感じを受ける）．逆にまったく説明せず「f は全単射」と言い放ってしまうのも，ここでは一つの考え方としてぎりぎり許容されるかなと（私は）思います（意見は分かれるでしょう）．

問題 7.B

$\aleph+\aleph_0=\aleph$ を証明せよ．

解答例

$\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}$ の和集合であって，$(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})\cap\mathbb{N}=\emptyset$ だから，濃度の和の定義により $|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|+|\mathbb{N}|$，すなわち $\aleph=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|+\aleph_0$．したがって，あとは $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|=\aleph$ であることを証明すればよい．

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$ だから $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|\le|\mathbb{R}|=\aleph$ である．一方で区間 $(0,1)$ を考えると $(0,1)\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ だから $|(0,1)|\le|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|$ であるが，ここで $(0,1)$ は連続の濃度を持つ．実際

$$(0,1)\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto\tan\pi(x-1/2)$$

は $(0,1)$ から $\mathbb{R}$ への全単射である．したがって $\aleph\le|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|$．ゆえに，Bernstein の定理により $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|=\aleph$ であることがわかる．

コメント

何を既知として書くか，ちょっと悩むところです．

（解答例のように Bernstein の定理を用いるのであれば，）「区間 $(0,1)$ が連続の濃度を持つ」というのは既知のこととしてもよいかもしれません．Bernstein の定理は「具体的に全単射を構成するのが難しい場合に威力を発揮する秘密道具」です．解答の主題がその Bernstein の定理の力を味わうことにあるのだとすれば，「$(0,1)$ が連続の濃度を持つ」という“具体的に全単射を構成することでわかってしまうこと”は瑣末なことと見なしても一理あるでしょう．

一方で，「$|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|\le|\mathbb{R}|$」に特に説明を付けていない解答がしばしば見られました．こちらはどうだろうか．Bernstein の定理が適用できる根拠の一翼を担う重要な事実だし，「濃度の大小」というのは「濃度の一致」よりもやや難しい概念ですから，個人的な感覚としては，こちらには理由がほしいところだと感じます．