問題 6.B についてのコメント

問題 6.B では，解答に何を要請しているのかに関して，説明が不十分でした．この問題に関する評価は特につけず，成績にも反映しないことにします．

問題（再掲）

可算の濃度 $\aleph_0$ が最小の無限濃度であることを証明したい．示すべきことは，X を無限集合とするとき，単射 $f\colon \mathbb{N} \to X$ が必ず存在するということである．

この問題は，森田茂之『集合と位相空間』に「章末問題 1.5」として挙げられている．その「略解」を一部改変して以下に示す．なお，ここでは $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ としている．

> X の有限部分集合の全体からなる集合を $\mathscr{F}(X)$ とする．このとき，任意の $A \in \mathscr{F}(X)$ に対し $A^c \neq \emptyset$ となる．ここで選択公理を使えば，ある選択関数
>
> $$\varphi\colon \mathscr{F}(X) \to \bigcup_{A \in \mathscr{F}(X)} A^c$$
>
> が存在する．そこで，$f(1) = \varphi(\emptyset), f(2) = \varphi(\{f(1)\}), f(3) = \varphi(\{f(1), f(2)\}), \ldots$ とおけば $f\colon \mathbb{N} \to X$ は単射となる．

上記の証明を，次に指摘する 2 つの疑問に対する答えが明らかになるように書き直せ．

(i)　第 3 文に「ここで選択公理を使えば，……が存在する」とあるが，選択公理をどのように適用しているのか．

(ii)　第 4 文に「そこで，……とおけば $f\colon \mathbb{N} \to X$ は単射となる」とあるが，ここに書かれている無限に続く操作は，どのようにして正当化されるか．

5 月 30 日に行った補足説明

(i) について：「どのような性質を満たす写像 φ の存在をここで証明しているのか」「選択公理をどのように適用することにより証明できると言っているのか」を説明してください．

(ii) について：ここでは「写像 $f\colon \mathbb{N} \to X$ を

$$\begin{cases} f(1) = \varphi(\emptyset) \\ f(n+1) = \varphi(\{f(1), \cdots, f(n)\}) \end{cases} \tag{$*$}$$

という初期条件と漸化式の組によって定義する」ということが行われています．ところで，この方法で「f が定義された」と言えるのは，

$$(*) \text{ を満たすような写像 } f\colon \mathbb{N} \to X \text{ が存在し，しかも一意的である} \tag{$**$}$$

からです．では $(**)$ が正しい理由は何か．それを数学的帰納法を用いながら説明してほしい．

コメント

解答例は後で述べますが，ひとまず，何が論点なのか（何を論点であると松本が考えているのか）を説明します．まず，「略解」で示されている方針による証明の意義を理解するために，一見すると選択公理を使わずに済んでしまう怪しげな「“証明”」を紹介しましょう．森田『集合と位相空間』35 ページの説明も参考にしてください．

> ［怪しい“証明”］$f(1), f(2), f(3), \ldots$ を順に定めていく．まず，X は空集合でないので $f(1) \in X$ を定めることができる．次に，$f(1), f(2), \ldots, f(n) \in X$ を互いに異なるように定めることができたとすれば，X が無限集合であることから $X \setminus \{ f(1), f(2), \ldots, f(n) \}$ は空集合でないので，$f(n+1) \in X \setminus \{ f(1), f(2), \ldots, f(n) \}$ を取ることができる．数学的帰納法により，単射 $f\colon \mathbb{N} \to X$ が得られる．

これの何がいけないというのか？ 問題点は最後の文「数学的帰納法により，単射 $f\colon \mathbb{N} \to X$ が得られる．」にあります．数学的帰納法によって得られる事実はこういうことではない．冷静に考えてみると，わかることは次の事柄に過ぎません：

$$\text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し，単射 } f\colon \{ 1, 2, \ldots, n \} \to X \text{ が存在する．} \tag{$\star$}$$

このことと

$$\text{単射 } f\colon \mathbb{N} \to X \text{ が存在する} \tag{$\star\star$}$$

ということの間には，明確なギャップがあります．実際，それを乗り越えるために，われわれは選択公理という特別な道具を使うわけです[*]．

さてそれでは，(i) と (ii) の各々について，想定していた解答の要点を説明します．

(i) について

選択公理とは何だったか？ 細かい主張の内容はとりあえず置いておいて，最も根本的なことは，選択公理というのは集合族に関する主張だということです．では今回の証明の中で，選択公理はどのような集合族に対して適用されるのか．集合族の添字集合は何なのか．「略解」の中では誰にでもわかるように説明されているとは言えません．この点を明らかにすることは，「選択公理をどのように適用しているのか」という疑問に対する答えには，ぜひとも期待されることだと言っていいと思います．（実際，これを明らかにしようとして失敗している人もいた．）

ここで選択公理の適用対象となっている集合族は，実は，$\{ A^c \}_{A \in \mathscr{F}(X)}$ というものです．$\mathscr{F}(X)$ 自体が添字集合になっています．記号上，添字集合 $\mathscr{F}(X)$ の元「A」が $\{ \quad \}_{A \in \mathscr{F}(X)}$ の括弧の中で添字のような格好をしていませんが，その点が気になるならば「$\{ B_A \}_{A \in \mathscr{F}(X)}$（ただし $B_A = A^c$）」と書き表すこともできます．

この集合族に（各 $A \in \mathscr{F}(X)$ に対して B_A すなわち A^c が空集合でないことを確認した上で）選択公理を適用すると，直積 $\displaystyle\prod_{A \in \mathscr{F}(X)} A^c$ が空集合でないことがわかります．ところで集合族の直

[*]ここで選択公理を使うことは本当に「必要」か（つまり，選択公理を採用しない体系においては，「可算の濃度は最小の無限濃度である」というのは証明できないことなのか）というのは繊細な問題です．私（松本）は——たぶん正しいのだろうと思うけれど——答えを知りません．ここでは深追いしないことにします（しようと思ってもできない）．

積の定義を思い出すと

$$\prod_{A \in \mathscr{F}(X)} A^c = \left\{ \varphi \colon \mathscr{F}(X) \to \bigcup_{A \in \mathscr{F}(X)} A^c \;\middle|\; \text{任意の } A \in \mathscr{F}(X) \text{ に対して } \varphi(A) \in A^c \right\}$$

なので，直積 $\displaystyle\prod_{A \in \mathscr{F}(X)} A^c$ が空集合でないというのは，「写像 $\varphi \colon \mathscr{F}(X) \to \displaystyle\bigcup_{A \in \mathscr{F}(X)} A^c$ であって任意の $A \in \mathscr{F}(X)$ に対して $\varphi(A) \in A^c$ であるようなものが存在する」ということに他なりません．そして，そのような φ こそが，「略解」の中で書かれている「選択関数」です．

(ii) について

怪しい“証明”の考察にあたっては，数学的帰納法によって何が示されているかを丁寧に捉えるのが大切なのでした．だから今度も，数学的帰納法を用いることで何がわかるのか慎重に検討してみましょう．わかるのは，（たとえば）次のことです：

> 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，写像 $f_n \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ であって $(*)$ を満たすようなものが一意的に存在する． (†)

示したいことは

> 写像 $f \colon \mathbb{N} \to X$ であって $(*)$ を満たすようなものが（一意的に）存在する (‡)

ということですが（正確に言うと (‡) の「一意的に」は要らない），(†) から (‡) を深く考えずに結論してしまったのでは，(★) から (★★) をあっさり結論する誤りと同じ轍を踏むことになってしまいます．

ここで重要なのは，(†) における写像 f_n が条件 $(**)$ によって<u>一意的に</u>決まっていることです．われわれは，たとえば次のようにして，目的の写像 $f \colon \mathbb{N} \to X$ を定義することになります：

$$f(n) = f_n(n).$$

なぜこれを f の「定義」と言ってよいか？ それは，f_n が一意的だからです．f_n が一意的でないのであれば，どれを選んで $f(n)$ を決めたらいいかわかりませんから，再び選択公理を使うことを考える必要が出てきてしまうだろうし，それでもなんとかなるとは限らない．

その後の議論は細かいことなので，次に述べる解答例に譲りましょう．

解答例

X の有限部分集合の全体からなる集合を $\mathscr{F}(X)$ とする．このとき，任意の $A \in \mathscr{F}(X)$ に対し $A^c \neq \emptyset$ となる．そこで集合族 $\{A^c\}_{A\in\mathscr{F}(X)}$ に選択公理を適用することにより，直積 $\prod_{A\in\mathscr{F}(X)} A^c$ が空集合でないことが従う．そこでこの直積の元 φ を一つとる．直積の定義により，φ とは

$$\varphi\colon \mathscr{F}(X) \to \bigcup_{A\in\mathscr{F}(X)} A^c$$

という写像であって，X の任意の有限部分集合 $A \in \mathscr{F}(X)$ に対して $\varphi(A) \in A^c$ が成り立つ．

いま構成した写像 φ を用いて，写像 $f\colon \mathbb{N} \to X$ を次が成り立つように定義したい：

$$\begin{cases} f(1) = \varphi(\emptyset), \\ f(n+1) = \varphi(\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}) \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ を満たす写像が存在することを証明する．まず次の補題を示す．

補題． 写像 $g\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ であって

$$\begin{cases} g(1) = \varphi(\emptyset), \\ g(k+1) = \varphi(\{g(1), g(2), \ldots, g(k)\}) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1) \end{cases}$$

を満たすものがただ一つ存在する．

［補題の証明］数学的帰納法を用いる．$n = 1$ の場合は，$g_1\colon \{1\} \to X, g_1(1) = \varphi(\emptyset)$ で与えられる g_1 が条件を満たす唯一の写像である．次に，$n = N$ に対して条件を満たす写像がただ一つ存在すると仮定して，その写像を g_N とする．そのとき，$g_{N+1}\colon \{1, 2, \ldots, N, N+1\} \to X$ を

$$\begin{cases} g_{N+1}(k) = g_N(k) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \\ g_{N+1}(k) = \varphi(\{g_N(1), g_N(2), \ldots, g_N(k)\}) \end{cases}$$

によって定義すれば，g_{N+1} は $n = N+1$ に対して補題の条件を満たす写像となる．一意性を示すために，$g\colon \{1, 2, \ldots, N, N+1\} \to X$ を $n = N+1$ に対して補題の条件を満たす写像としよう．そのとき制限 $g|_{\{1,2,\ldots,N\}}$ は $n = N$ に対して補題の条件を満たすので，われわれの数学的帰納法の仮定により $g|_{\{1,2,\ldots,N\}} = g_N$ である．さらに $g(k) = \varphi(\{g(1), g(2), \ldots, g(k)\}) = \varphi(\{g_N(1), g_N(2), \ldots, g_N(k)\})$ でなければならない．ゆえに $g = g_{N+1}$ である． □

補題によって一意的に存在することのわかる写像 $g\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ を f_n と書くことにする．そして，$f\colon \mathbb{N} \to X$ を

$$f(n) = f_n(n)$$

により定義する．$f(1) = f_1(1) = g(\emptyset)$ である．また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$k \leq n$ の範囲では $f_k = f_n|_{\{1,2,\ldots,k\}}$ より $f(k) = f_n(k)$ となる．これは $f|_{\{1,2,\ldots,n\}} = f_n$ ということで，したがって f は

$$f(k+1) = \varphi(\{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

を満たす．n は任意だから，結局 $(*)$ が成立することがわかる．

f の性質 $(*)$ と φ の性質 $\varphi(A) \in A^c$ によって，任意の n に対し $f(n+1) \in \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}^c$ である．つまり $f(n+1)$ は $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ のいずれとも異なる．ゆえに f は単射である．