§5 必修問題の解説

問題 5.A

集合 A から A 自身への全単射のことを A 上の置換という．A 上の置換全体のなす集合を，ここでは $S(A)$ と書くことにしよう．$S(A)$ 上に，次のようにして関係 $\sim$ を定義する：置換 $f, f' \in S(A)$ に対し

$$f \sim f' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f' = g^{-1} \circ f \circ g \text{ となるような } g \in S(A) \text{ が存在する}$$

と定める．この関係 $\sim$ が $S(A)$ 上の同値関係であることを証明せよ．

コメント

関係 $\sim$ が「$f' = g^{-1} \circ f \circ g$ となるような $g \in S(A)$ が存在する」という存在命題を用いて定義されていますが，存在命題の取り扱いにまだ十分に慣れていない人が一定程度いる印象を持ちました．その「不慣れさ」は，大きく分けて次の 2 通りの形で現れていたように思います．

まず推移律の証明において．「$f \sim f'$ かつ $f' \sim f''$」という仮定から出発することになります．「$f \sim f'$ かつ $f' \sim f''$」というのは「$f' = g^{-1} \circ f \circ g$ となる $g \in S(A)$ が存在し，かつ $f'' = g^{-1} \circ f' \circ g$ となる $g \in S(A)$ が存在する」ということですが，前半と後半で共通の $g \in S(A)$ を取れるかどうかはわかりません．単独で「$f \sim f'$」だけを用いる状況であれば，丁寧に書けば「$f' = g^{-1} \circ f \circ g$ となる $g \in S(A)$ が存在するので，そのような g を一つ取り固定する」となるところを省略気味に「$f' = g^{-1} \circ f \circ g$（ただし $g \in S(A)$）とできる」などとしても問題はありません．でも，今の状況で「$f' = g^{-1} \circ f \circ g, f'' = g^{-1} \circ f' \circ g$（ただし $g \in S(A)$）とできる」としてしまうのは誤りです．

もう一つのパターン．これは特定の出現箇所は無いのですが，「$f' = g^{-1} \circ f \circ g$ となるような $g \in S(A)$ が存在する．存在するので $g = \mathrm{id}_A$ とすれば（？）$f' = f$ となる」という誤りがわずかながらありました．なぜこういう誤りが生じたのか，測りかねる感じもしますが，想像するに「$g = \mathrm{id}_A$ とすれば $f = g^{-1} \circ f \circ g$ が成り立つので，確かに『$f = g^{-1} \circ f \circ g$ となる $g \in S(A)$ が存在する』と言える」という型の推論*（これは正しい）を逆転させてしまったのでしょうか．

解答例

$S(A)$ 上の関係 $\sim$ が反射律，対称律，推移律を満たすことを確かめる．

<u>反射律</u>　任意の $f \in S(A)$ に対して，$f = \mathrm{id}_A^{-1} \circ f \circ \mathrm{id}_A$ が成り立つ（ここで id_A は A 上の恒等写像）ので $f \sim f$ である．

<u>対称律</u>　$f \sim f'$ と仮定する．そのとき $f' = g^{-1} \circ f \circ g$ となる $g \in S(A)$ が取れる．そうすると $g \circ f' \circ g^{-1} = g \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \circ g^{-1} = (g \circ g^{-1}) \circ f \circ (g \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_A \circ f \circ \mathrm{id}_A = f$ である．ここで $g = (g^{-1})^{-1}$ だから $f = (g^{-1})^{-1} \circ f' \circ g^{-1}$．ゆえに $f \sim f'$ が成り立つ．

<u>推移律</u>　$f \sim f'$ かつ $f' \sim f''$ であると仮定する．そのとき $f' = g_1^{-1} \circ f \circ g_1, f'' = g_2^{-1} \circ f' \circ g_2$ となる $g_1, g_2 \in S(A)$ が取れる．そうすると $f'' = g_2^{-1} \circ f' \circ g_2 = g_2^{-1} \circ (g_1^{-1} \circ f \circ g_1) \circ g_2 = (g_2^{-1} \circ g_1^{-1}) \circ f \circ (g_1 \circ g_2)$ である．ここで $g_2^{-1} \circ g_1^{-1} = (g_1 \circ g_2)^{-1}$ だから $f'' = (g_1 \circ g_2)^{-1} \circ f \circ (g_1 \circ g_2)$．ゆえに $f \sim f''$ が成り立つ．

---

*数学や論理学で「推論」と言ったら，「推定を交えながら結論を導くこと」ではなく，「演繹（えんえき）」すなわち「前提から論理規則に従って結論を導くこと」を指します．たぶん「deduction」の訳語なのでしょうが，訳語が悪い気がする．

問題 5.B

次に挙げる $\mathbb{R}$ 上の関係 $\sim$ が同値関係であるかどうか判定せよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．また，$\mathbb{Z}\sqrt{2}$ という記号で，集合 $\{\, n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ のことを表す．

(1) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Q}$.

(2) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(3) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x - y \in \mathbb{Z}$ または $x - y \in \mathbb{Z}\sqrt{2})$.

(4) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \{\, m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}$.

コメント

全体として，比較的よくできていたように思います．

ただ，(3) で反例を挙げる際に，少々疑問を残すような形で提示をしていたケースが多かったのが気になりました．「$x - y = 1, y - z = \sqrt{2}$ となるような $x, y, z \in \mathbb{R}$ を考えると……」といった説明のことです．「そのような x, y, z は実際に存在するのか？」という問いが発生する．今回はその答えが yes であることはほとんど明らかですが，でも「これは看過してはいけないポイントである」というのは間違いないので，それを認識しているかどうか怪しい答案には評価 A は付けませんでした．

解答例

(1) 同値関係である．

<u>反射律</u>　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$x - x = 0 \in \mathbb{Q}$ であるから $x \sim x$.

<u>対称律</u>　$x \sim y$ のとき，$x - y \in \mathbb{Q}$ であるから $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$，すなわち $y \sim x$.

<u>推移律</u>　$x \sim y$ かつ $y \sim z$ のとき，$x - y, y - z \in \mathbb{Q}$ であるから $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$，すなわち $x \sim z$.

(2) 同値関係ではない．反射律が成立していない．たとえば $0 \in \mathbb{R}$ について考えると，$0 - 0 = 0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ だから $0 \nsim 0$ である*.

(3) 同値関係ではない．推移律が成立していない．たとえば $0, 1, 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ について考えると，$0 - 1 = -1 \in \mathbb{Z}, 1 - (1 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$ より $0 \sim 1$ かつ $1 \sim 1 + \sqrt{2}$ であるが，$0 - (1 + \sqrt{2}) = -(1 + \sqrt{2})$ は $\mathbb{Z}$ にも $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ にも属していないので $0 \nsim 1 + \sqrt{2}$ である．

(4) 同値関係である．証明に際し，集合 $\{\, m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}$ を A という記号で表す．

<u>反射律</u>　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$x - x = 0 = 0 + 0\sqrt{2} \in A$ であるから $x \sim x$.

<u>対称律</u>　$x \sim y$ のとき，$x - y = m + n\sqrt{2}$ となる $m, n \in \mathbb{Z}$ を取ることができる．そうすると $y - x = -(x - y) = (-m) + (-n)\sqrt{2} \in A$ となるから，$y \sim x$ が成り立つ．

<u>推移律</u>　$x \sim y$ かつ $y \sim z$ のとき，$x - y = m_1 + n_1\sqrt{2}, y - z = m_2 + n_2\sqrt{2}$ となる $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ を取ることができる．そうすると $x - z = (x - y) + (y - z) = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2} \in A$ となるから，$x \sim z$ が成り立つ．

---

* 「任意に $x \in \mathbb{R}$ を取ると，$x - x = 0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ だから $x \nsim x$ である．したがって反射律が不成立」という説明でも許容範囲だと思います．ですが，反射律の不成立を言うためには，$x \nsim x$ を満たす元 x が一つでもあれば十分であることに注意しておいてください．また厳密に言うと，この説明を採用するなら，「コメント」で行った (3) についての指摘と同じ理由で，$\mathbb{R}$ が空集合でないことにも触れるのが望ましいと思います．