今学期の内容の復習

次に挙げる主張はすべて誤っている．修正して正しい主張にせよ．2 通り以上の修正を試みるのもよいと思う．$\mathbb{R}$ などの記号は用いてよい．また同時に，下線部の用語の定義が説明できるか，自分の中で確かめること．

数列とその収束，実数の完備性（連続性）

1. 各項が 0 でないような数列 $\{a_n\}$ が<u>収束</u>すれば，数列 $\{1/a_n\}$ も収束する．

2. 数列 $\{a_n\}$ にはその<u>上極限</u> $\alpha^* \in \mathbb{R}$ が必ず存在する．（注：「数列」は「実数からなる数列」と解釈せよ．）

3. 正の実数からなる集合の<u>下限</u>は正である．（注：「正の実数からなる集合」とは「正の実数全体の集合の部分集合」の意味．）

4. 2 の正の<u>平方根</u> $\sqrt{2}$ が無理数となることは，<u>実数の完備性</u>を用いて証明される．

級数

5. 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が<u>収束</u>するための必要十分条件は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることである．

6. 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は，$\{a_n\}$ が有界ならば必ず収束する．

7. 収束する 2 つの級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ に対し，$c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ とおけば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も収束して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ が成り立つ．

関数列の一様収束

8. 連続関数の列 $\{f_n\}$ が有界閉区間 I で f に一様収束しているとき，f も I 上で連続である．I が有界閉区間でない区間の場合にはそうとは限らない．

9. 連続関数の列 $\{f_n\}$ が区間 $[a,b]$ で f に各点収束するとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ である．

10. C^1 級関数の列 $\{f_n\}$ が区間 I で C^1 級関数 f に一様収束するならば，導関数の列 $\{f_n'\}$ も I で f' に一様収束する．

11.　関数列 $\{ f_n \}$ について一様収束に関する Cauchy の条件が満たされることは，$\{ f_n \}$ が一様収束するための十分条件ではあるが必要条件ではない．

関数項級数，冪級数

12.　有界閉区間 I で定義された関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ に対して，数列 $\{ M_n \}$ であって

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad x \in I, \qquad \lim_{n\to\infty} M_n = 0$$

を満たすようなものが存在するとき，$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は I で一様収束する．I が有界閉区間でない区間の場合にはそうとは限らない．

13.　冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とすると，この冪級数は開区間 $(-R, R)$ で一様収束する．

14.　冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 R は $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ の逆数に等しい．ただし 0 の逆数は ∞ と，∞ の逆数は 0 と解釈する．

パラメタに関する一様収束

15. $\{ f_n \}$ が区間 $[0, \infty)$ 上で f に一様収束しているとき, $\displaystyle\int_0^a f_n(x)dx$ は $\underline{a > 0 \text{ に関して一様に}}$ $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ $\underline{\text{に収束}}$する.