§8　これまでの内容の復習，冪級数

課題

以下の問題に解答し，演義の授業時間内に，1 問できるごとに提出してください．提出順に，授業時間内に直接面談をしながら解答についてコメントします．大きな問題点があれば再提出を求めます．6/26, 7/3, 7/10 の演義をこのための時間として充てるので（予定），その間に 4 問について適切な解答を完成できるよう努力してください．

ただし，問題 8.B は 2.B と，問題 8.C は 6.B とそれぞれ同じものです．問題 2.B および 6.B の解答を過去に提出した際に評価 A を受けている場合は，同じ問題については解答の提出をする必要はありません．どういう評価を受けたかわからなければ，確認しに来てください．

8.A　（はさみうちの原理）
数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ について，任意の n に対し $a_n \le b_n \le c_n$ が成り立ち，かつ $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ が同じ実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとする．そのとき $\{b_n\}$ も収束し，極限は α であることを証明せよ．（数列の極限の定義に基づいて議論すること．）

8.B　数列 $\{a_n\}$ がある実数に収束するならば，$\{a_n\}$ は Cauchy 列である．これを証明せよ．

8.C　自然数 n に対し $f_n(x) = x^n$ とおく．区間 $[0,1)$ で関数列 $\{f_n\}$ が一様収束しないことを示せ．

8.D　次の問いに答えよ．

(1)　区間 $[a,b]$ で定義された一様収束するような C^1 級関数の列 $\{f_n\}$ について，さらに導関数からなる列 $\{f_n'\}$ も一様収束すると仮定する．そのとき，$\{f_n\}$ の極限関数 f も C^1 級で，f' は $\{f_n'\}$ の極限関数に一致するのだった*．証明を述べよ．

(2)　正の収束半径 R を持つ冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，開区間 $(-R,R)$ において $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおく．そのとき，f は $(-R,R)$ で C^1 級であり，$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

任意提出問題

8.1　次を証明せよ：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = 0.$$

ただし，左辺の定積分を n を用いて具体的に表示するのは避けること．［ヒント：区間 $[0,\pi/2]$ で関数列 $\{\sin^n x\}$ は一様収束しない．ではどうするか，という問題.］

*実際には，$\{f_n\}$ が一様収束することは，仮定しなくても他から自動的に従う（なぜか？）．

8.2　$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であって，$\mathbb{R}$ 全体で $f \geq 0$ で，ある有界閉区間 $[a, b]$ の外側 $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ で f は恒等的に 0 に等しく，さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

であるようなものが与えられたとする．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を有界な連続関数とし，

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)\varphi_n(y)\, dy, \qquad \text{ただし} \quad \varphi_n(y) = n\varphi(ny)$$

と定める．関数列 $\{ f_n \}$ が $\mathbb{R}$ において f に一様収束することを証明せよ．

8.3　関数 $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

によって定義する．関数列 $\{ f_n \}$ が e^{-x^2} に $\mathbb{R}$ で一様収束することを示せ．

8.4　α, β, γ を実数とし，γ は 0 でも負の整数でもないとする．羃級数（Gauss の超幾何級数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n} x^n$$

の収束半径を求めよ．ただし一般に実数 α に対し，記号 $(\alpha)_n$ は $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$ を表す（「Pochhammer 記号」と呼ばれる）．$(\alpha)_0$ は 1 と定める．

8.5　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束しかしていないとする（収束するが，絶対収束はしていないとする）．そのとき，どんな実数に対しても，それに応じて与えられた級数の項を適切に並べ替えることにより，得られる級数がその実数に収束するようにできることを証明せよ．すなわち，任意の実数 α に対し，ある全単射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$（ここで $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$）が存在して，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ が α に収束することを証明せよ．

8.6　関数 $\Gamma\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

によって定義する（ガンマ関数）．

(1)　上記の定義の右辺にある広義積分が収束することを示せ．（$0 < x < 1$ のときは，積分の下端でも極限をとっていることに注意すること．）

(2)　任意の自然数 $n\ (\geq 1)$ に対し，$\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを示せ．

(3)　$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を示せ．［ヒント：まず $\Gamma(1/2) = 2\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$ を示す．この右辺の積分（Gauss 積分）は多変数関数の積分を用いる巧妙なやり方で計算できる．］

(4)　$x, y > 0$ に対し

$$2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1} d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

を証明せよ（この両辺をベータ関数といい $B(x, y)$ で表す．なお，左辺は x, y によっては広義積分となることに注意）．［ヒント：これは (3) の一般化．$x = y = 1/2$ とすると $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ が得られる．(3) の証明の仕方を利用できないか考えてみよ．］