§7　関数列や関数項級数の一様収束 (2)

§6 でも関数列や関数項級数の一様収束について取り上げましたが，さらに問題を補充します．

必修問題

$a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とする．有界閉区間 $[a, b]$ において連続な関数の列 $\{ f_n \}$ が関数 f に一様収束しているとき，f も $[a, b]$ 上で連続になるのだった．またこのとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つことも学んだはずである*．では区間 $[a, \infty)$ ではどうだろうか．

7.A　「区間 I において連続な関数の列 $\{ f_n \}$ が関数 f に一様収束しているとき，f も I で連続である」という主張は，I が有界閉区間である場合に限らず正しい．証明を与えよ（I が有界閉区間の場合も既知とはしないこと）．

7.B　区間 $[a, \infty)$ において連続な関数の列 $\{ f_n \}$ が関数 f に一様収束しているものとする．前問の結果により，f も $[a, \infty)$ で連続である．さらに次の広義積分が存在する（定義される）ことを仮定する：

$$\int_a^\infty f_n(x)\,dx \ \left(= \lim_{b\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\right), \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \ \left(= \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx\right).$$

そのとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$ は常に正しいだろうか．

任意提出問題

7.1　$R > 0$ とする．$f_n(x) = n \sin(x/n)$ について，関数列 $\{ f_n \}$ が区間 $[-R, R]$ 上で一様収束するかどうか調べよ．［まずはグラフを描くなどして状況をよく観察し，予想を立てること．ヒント：たとえば，sin に Taylor の定理を適用する．］

7.2　本問では，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

と定義する．この定義に基づき $(\sin x)' = \cos x$ であることを証明せよ．

7.3　前問の定義に基づき，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を証明せよ．［ヒント：たとえば，問題 5.B の問題文で述べたことを用いる．］

*正確に言えば，積分の収束においては，各 f_n は必ずしも連続でなければならないわけではなく，Riemann 積分可能であればそれで十分．証明を思い浮かべればわかるはず．