# §6　一様収束

## 必修問題

6.A　自然数 $n$ に対し $f_n(x) = x^n$ とおく．$a$ を $0 < a < 1$ なる任意の実数とするとき，区間 $[0, a]$ で関数列 $\{ f_n \}$ が定数関数 0 に一様収束することを示せ．

6.B　前問の関数列 $\{ f_n \}$ が，区間 $[0, 1)$ では一様収束しないことを見たい．

(1)　一般に，区間 $I$ で定義された関数列 $\{ f_n \}$ について考えよう．$f$ も区間 $I$ で定義された関数であるとする．「$\{ f_n \}$ が $f$ に一様収束しない」とはどういうことか．なるべく否定表現を使わずに説明せよ．

(2)　$f_n(x) = x^n$ とするとき，区間 $[0, 1)$ で関数列 $\{ f_n \}$ が一様収束しないことを示せ．

## 任意提出問題

6.1　関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(n-1)!}$ が区間 $[0, \pi]$ 上で一様収束することを示せ．さらに，この級数の和を $f(x)$ とするとき，定積分

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

の値を求めよ．なお，問題 5.1 の結果を用いてよい．

6.2　関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ が，任意の $R > 0$ に対し，区間 $[-R, R]$ 上で $\sin x$ に一様収束することを証明せよ．

［ヒント：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ は $\sin x$ の $x = 0$ における Taylor 展開だが，それだけでは理由の説明として不十分．Taylor の定理を正確に使う必要がある．］

6.3　有界閉区間 $[a, b]$ で定義された関数列 $\{ f_n \}$ を考える．ただし各 $f_n$ は連続で，任意の $x \in [a, b]$ に対し $f_n(x) \neq 0$ を満たすとする．さらに $\{ f_n \}$ は関数 $f$ に一様収束し，$f$ についても任意の $x \in [a, b]$ に対し $f(x) \neq 0$ が成り立つと仮定する．そのとき，関数列 $\{ 1/f_n \}$ も $[a, b]$ で $1/f$ に一様収束することを示せ*.

---

* 「$1/f_n$」は $g_n(x) = 1/f_n(x)$ で定義される関数 $g_n$ のことを表している．「$1/f$」も同様.