§5　正項級数の収束判定法，級数の絶対収束と条件収束

必修問題

5.A　次の正項級数が収束するかどうか判定せよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ［ヒント：d'Alembert（ダランベール）の判定法（ratio テスト），もしくはもっと直接的に．］

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ ［ヒント：Cauchy（コーシー）の判定法（root テスト）．］

5.B　絶対収束する 2 つの級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n, \sum_{n=0}^{\infty}b_n$ について，各々の和を A, B とすると，次が成り立つ：

$c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ と定めると，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ も収束し，その和は AB で与えられる．　(★)

特に，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n, \sum_{n=0}^{\infty}b_n$ が収束する正項級数であれば (★) が成り立つ（正項級数に対しては「絶対収束」は「収束」と同じことだから）．

さて，自然対数の底 e を $e=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ によって定義する．上に述べた事実を用いて，任意の自然数 m に対し $e^m=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{n!}$ であることを証明せよ．

任意提出問題

5.1　$e=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ とする．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ が収束し，その和が $1/e$ であることを証明せよ．［ヒント：e との積が 1 となればよい．］

5.2　問題 5.B で述べられている事実についてさらに議論する．実は，必ずしも 2 つの級数の両方が絶対収束していなくてもよい．一方の級数が絶対収束してさえいれば，もう一方が条件収束しかしていなくても（つまり収束してはいるが絶対収束してはいなかったとしても），(★) が成立することが知られている．

だが，2 つの級数がどちらも条件収束しかしていない場合は，(★) は必ずしも成り立たない．このことを説明せよ．［ヒント：たとえば $a_n=b_n=(-1)^n/\sqrt{n+1}$ とした場合を考察するとよい．］

5.3　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ の任意の部分級数が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は絶対収束することを証明せよ．