§4　級数

必修問題

4.A　次の（正項）級数が収束することを証明せよ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

4.B　前問の級数の和を S とする．（和 S のことも $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ という記号で表す場合もある．）

$$1.6 < S < 1.7$$

を証明せよ．［コメント：実は $S = \pi^2/6 = 1.6449\ldots$． Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ の $s = 2$ における値．逆に $S = \pi^2/6$ を既知とするなら，$1.6 < S < 1.7$ を証明することにより $\sqrt{6 \cdot 1.6} < \pi < \sqrt{6 \cdot 1.7}$ がわかることになる．］

任意提出問題

4.1　次の級数が収束するかどうか判定せよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \log n}$　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^n - n^2}$

4.2　実数 $s > 0$ に対し，級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ を考える．この級数が収束するかどうか判定せよ．結論は，s の値により場合分けをして述べよ．

4.3　正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを証明せよ．［ヒント：Schwarz の不等式.］

4.4　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ の和を S とおく．そのとき

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = S$$

であることを証明せよ．なお，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ が収束すること，および極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が存在することは既知としてよい．