§3　実数論，数列の上極限・下極限

必修問題

3.A　次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し，またその極限を求めよ：

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

［ヒント：まず初めのほうの項をいくつか求めてみて，様子を観察せよ.］

3.B　次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の上極限 $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ と下極限 $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ を求めよ：

$$a_1 = 1, \quad a_{2m} = \frac{a_{2m-1}}{2}, \quad a_{2m+1} = a_{2m} + 1 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

任意提出問題

3.1　数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散すると仮定する*．そのとき，最小の項 a_{n_0} が存在することを証明せよ．すなわち，「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_{n_0} \le a_n$」となるような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在することを証明せよ．［コメント：この問題は実数論とは関係ない.］

3.2　問題 3.B の数列 $\{a_n\}$ の上極限，下極限をそれぞれ α^*, α_* とする．すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，次の集合はいずれも無限個の元を持つことになる：

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n > \alpha^* - \varepsilon\}, \qquad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < \alpha_* + \varepsilon\}.$$

そのことを，一般的な事実によるのではなく，この数列 $\{a_n\}$ に関する具体的な考察によって確かめよ.

3.3　$\mathbb{R}$ の部分集合 I に関する次の性質を考える：

「$x, y \in I$ および $z \in \mathbb{R}$ が $x < z < y$ を満たすとき，z も必ず I に属する.」

この性質を満たすような I は，次のいずれかの形の集合に限られることを証明せよ：

$$\emptyset, \quad \{a\}, \quad (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b], \quad (a, \infty), \quad [a, \infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \quad \mathbb{R}.$$

ただし a, b は実数を表す†.

3.4　有理数体 $\mathbb{Q}$ では連続性の公理（完備性の公理）は成立していない．このことを複数の方法で説明したい.

(1)　実数の連続性を表す具体的な命題を，2 通り以上書け.

(2)　(1) で挙げた各々の命題について，実数体 $\mathbb{R}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ に置き換えると，その命題が成立しないことを確かめよ.

---

*単に「数列」と書いたら実数列のことを意味するものと約束する.

†この問題の結論によって，問題で与えられた性質を「区間」の定義として採用することができる．ただしその場合，空集合 $\emptyset$ や 1 元集合 $\{a\}$ も「区間」と呼ぶことになる．それがよいかどうかは微妙なところだろう.