§2　基本的な不等式，その利用

必修問題

以下の 2 問では，任意の実数 a, b に対し $|a+b| \le |a| + |b|$ であることを用いてよい．

2.A　2 つの収束する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について[*]，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき，数列 $\{a_n b_n\}$ も収束し $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ となることを証明せよ．

2.B　数列 $\{a_n\}$ がある実数に収束するならば，$\{a_n\}$ は Cauchy 列である．これを証明せよ[†]．

任意提出問題

2.1　次の問いに答えよ．

(1)　n を正整数とする．任意の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ であることを示せ．（$n = 2$ の場合も既知としてはならない．）

(2)　f を有界閉区間 $[a, b]$ において定義された連続な実数値関数とする．

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

であることを示せ．

2.2　$\mathbb{R}^n$ における Schwarz の不等式と三角不等式とはどのような不等式か述べ，それらを証明せよ．（等号成立条件の議論は不要．）

2.3　有界閉区間 $[a, b]$ で定義された C^1 級の実数値関数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して，$M = \sup_{a \le x \le b} |f'(x)|$ とおくと $|f(b) - f(a)| \le M|b - a|$ が成り立つ．これを有限増分の定理という．

(1)　問題 2.1 の結果を用いて上記の定理を証明せよ．

(2)　平均値の定理を用いて上記の定理を再証明せよ[‡]．

(3)　上記の定理は，ベクトル値関数に対しても一般化できる．$\mathbb{R}^2$ 値 C^1 級関数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ に対して定理を定式化し，証明せよ．

2.4　f を開区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された C^2 級実数値関数とし，任意の $x \in I$ に対し $f''(x) \ge 0$ であるとする．そのとき，任意の $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対し

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

が成り立つことを証明せよ．（これを凸不等式という．）

---

[*] 単に「数列」と書いたら実数列のことを意味するものと約束する．

[†] このことから当然，有理数列 $\{a_n\}$ についての「$\{a_n\}$ がある有理数に収束するならば，$\{a_n\}$ は Cauchy 列である」という主張も正しい．さて，実数列に関する主張と有理数列に関する主張の各々について，その逆を考えると，それぞれ真偽はどうなるか．考えよ．

[‡] したがって「C^1 級」の仮定は弱められることがわかるだろう．