§1　微積分の復習など

必修問題

1.A　a を任意の正の実数とする．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

であることを証明せよ．（もちろん本当は a の符号に関わらず同じ式が成立するのだが，ここでは $a>0$ の場合だけを考えればよい．）

1.B　$\sqrt{2}$ とはどのような数か．それが満たすべき性質を述べることによって定義せよ．
　また，その定義で述べた性質を持つ数が，実際に存在し，しかもただ一つしかないことを証明せよ．

任意提出問題

1.1　次のように定義される区間 $[0,1]$ 上の実数値関数 f を考える：

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ が有理数のとき,}\\ 0, & x\text{ が無理数のとき.}\end{cases}$$

Riemann 積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ が存在しないことを示せ．

1.2　D を $\mathbb{R}^2$ の領域とし，D 上で定義された 2 変数実数値関数 $f\colon D\to\mathbb{R}$ を考える．

(1)　点 $(a,b)\in D$ において f が微分可能（全微分可能）であるならば，この点において f は各変数について偏微分可能であることを証明せよ．

(2)　(1) の逆は成り立つか．すなわち，点 (a,b) において f が各変数について偏微分可能であるならば，この点において f は微分可能（全微分可能）といえるだろうか．

1.3　「平均値の定理の高次元化」について考えてみる．それには 2 つの方向性がある——定義域の高次元化と，終域の高次元化である．前者は多変数の Taylor の定理の特別な場合にほかならない．そこで後者を問題とする．
　次の主張は正しいだろうか．
　「$a<b$ とする．ベクトル値関数 $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ は連続で，かつ (a,b) で微分可能であると仮定する．そのとき，

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を満たす $c\in(a,b)$ が存在する．」

1.4　一般に，体（たい）において，$1+1$ のことを「2」と書くことにする．
　$a^2=2$ を満たす元 a がちょうど 1 個だけ存在するような体はあるだろうか．また，そのような元 a が 3 個以上存在する体はあるだろうか．