§8 課題について

提出期限等の変更

提出期限・方法を次のように変更します．

問題 8.A, 8.B（2.B で評価 A を受けた人を除く），8.C（6.B で評価 A を受けた人を除く）

7 月 18 日（火）17:00 まで提出・再提出を受け付けます．数学科事務のレポートボックスに提出してください．

問題 8.D

今日の授業終了時に提出するか，または 7 月 11 日（火）17:00 までに数学科事務のレポートボックスに提出してください．

各問題のヒント

問題 8.A, 8.B について

「任意の ε に対して」とか「$n \geq N$ ならば」といった文言を書くことになりますが，よく注意して，適切な位置に書いてください．書く場所によっては，ε や n は局所的な役割しか果たさないものと解釈されます．たとえば，問題 8.A 解答の冒頭で「数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ が α に収束するという仮定から，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し……が成り立つ．」と書いたら，ε の役割はこの文の末尾で終わりです（そう読まれます）．ε を最後まで有効なものとするためには，「任意に $\varepsilon > 0$ をとる．そのとき，数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ が α に収束するという仮定から，ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し……が成り立つ．……」といった書き方が適切です．

問題 8.C について

事実として正しいことが述べてあり，それが確かに $\{f_n\}$ が一様収束していないことを示すものであったとしても，それだけでは不十分と考えてください．この問題では，「この書き手は一様収束の定義を正確に理解している」と読み手に納得させるような解答が求められています．読み手が「好意的な解釈」をしてあげなければならないようなものではだめです．

具体的な計算を提示する前に，いったん，「何が示されれば『一様収束していない』と言えるのか」ということをまとめておくのがいいと思います．それをしないと，今回の関数列 $\{f_n\}$ の性質上，うっかりすると必要以上に強い事実を述べることになってしまうので，「言っていることは誤りではないけれど，この人は定義自体は正しく理解しているのか？」という疑念を読み手に抱かせることになります．

問題 8.D について

(1) は『微分積分講義』で説明されているはずです．

(2) について．まず，(1) に書かれていることを即座に適用して終わりというわけにはいかないことを注意したいと思います．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を収束半径 $R > 0$ を持つ冪級数とします[*]．ここで

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

と置いたとき，関数列 $\{ f_n \}$ は区間 $(-R, R)$ 全体で一様収束するとは限りません[†]．どういう区間であればよいのかというと，たとえば $[a, b]$ という形の閉区間（ただし $-R < a < b < R$）では一様収束することが知られています．（本問に解答する上で，ここまでは既知としてよいことにします．）

では，あとは何がわかればいいか．

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ の収束半径もやはり } R \text{ である} \tag{$*$}$$

ということを示すと，(1) をうまく利用して目的を達することができます．そういうわけで，(2) は

(2a) $(*)$ を既知として，(1) を用いて，開区間 $(-R, R)$ において $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ が成り立つことを示す

(2b) $(*)$ を示す

という 2 つのステップに分割して考えるのがよいでしょう（問題ではさらに f が C^1 級であることのチェックが要求されていますが，上記 (2a), (2b) が示されれば，f' は区間 $(-R, R)$ で連続となるので，f は C^1 級です）．(2a) は落ち着けばできるはずなので，全員が正しく述べられるようにすることを望みます．(2b) の証明はそう簡単ではありませんが，収束半径のどのような特徴づけを利用するのがいいかよく考えて，頑張ってみてください．

---

[*] R は有限の値として考えてかまいませんが，$R = +\infty$ の場合も議論はほとんど同じなので，可能ならその場合も含める形で解答を述べられるとよいと思います．

[†] たとえば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ という冪級数を考えてみると，収束半径は 1 ですが，区間 $(-1, 1)$ で一様収束しません．