§7 必修問題の解説

問題 7.A

「区間 I において連続な関数の列 $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束しているとき，f も I で連続である」という主張は，I が有界閉区間である場合に限らず正しい．証明を与えよ．

解答例

任意にとった点 $a \in I$ について，関数 f が a において連続であることを証明する．そこで任意に $\varepsilon > 0$ をとる．示すべきことは，ある $\delta > 0$ を適切に選ぶことにより

$$|x - a| < \delta \text{ を満たすような任意の } x \in I \text{ について } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{$\star$}$$

が成り立つようにできるということである．

まず関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束していることから，

$$n \geq N \text{ を満たす任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し，任意の } x \in I \text{ について } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \tag{$*$}$$

となる $N \in \mathbb{N}$ をとれる．そのような N に対し，$(*)$ から特に

$$\text{任意の } x \in I \text{ について } |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3. \tag{$**$}$$

さらに f_N が連続であることから，

$$|x - a| < \delta' \text{ を満たすような任意の } x \in I \text{ について } |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3 \tag{$***$}$$

となる $\delta' > 0$ をとれる．$(***)$ を満たす δ' をとって $\delta = \delta'$ とすれば $(\star)$ が成り立つ．なぜなら，$|x - a| < \delta = \delta'$ を満たす $x \in I$ に対し

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

だからである（2 つ目の不等号において $(**)$ と $(***)$ を用いた）．

コメント

f が任意の点 $a \in I$ で連続であることを証明したいので，上記の解答例のように，与えられた $\varepsilon > 0$ に対し適切な $\delta > 0$ をとることになり，それは当然，いずれかの f_n の a における連続性「任意の $\varepsilon' > 0$ に対し，ある $\delta' > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta'$ を満たす任意の $x \in I$ について $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon'$」を用いて行うことになります．

しかし，ここに現れる δ' は，n ごとに異なることに注意してください．だから，なんとなく「『$|x - a| < \delta'$ を満たす任意の $x \in I$ について $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$』となるような $\delta' > 0$ をとる」と書いてはいけない——そう書いても，δ' のとり方を明確に指し示したことにはならない．「この文は意味をなさない」と言ってもよい．上記の解答例の $(***)$ を再度見てください．ちゃんと，$n = N$ に対する δ' をとることが書かれているでしょう．これは別に $n = N + 1$ でも $n = N + 10000$ でもよいのですが（わかりますか？），何か一つ指定することが重要です．

自分の書いた証明を冷静な目で読み返して，こういうことに気づかなければならない．

問題 7.B

区間 $[a,\infty)$ において連続な関数の列 $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束しているものとする．前問の結果により，f も $[a,\infty)$ で連続である．さらに次の広義積分が存在することを仮定する：

$$\int_a^\infty f_n(x)\,dx\ \left(=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx\right),\quad \int_a^\infty f(x)\,dx\ \left(=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx\right).$$

そのとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f_n(x)\,dx=\int_a^\infty f(x)\,dx$ は常に正しいだろうか.

コメント

まず初めに一言．この問いは「既知の知識から外に一歩踏み出したときに何が起こるか」ということを問題にしている．定理に出会ったときに，この種の問題を自分で設定し，考えてみることが大切です．表面的にわかっただけの定理は表面的に適用することしかできないけれど，そうやって「深く」理解した定理は，幅広く応用できるようになるはずです.

さて今回の主張は，授業中にすでに言ってしまったように，正しくありません．まずは具体的な関数列を闇雲に一つ二つ考えてみればいいと思いますが，それでは反例が構成できそうになければ，有界閉区間の場合の同様の主張の証明を再検討してみる．そこでは，有界閉区間 $[a,b]$ が有限の「長さ」$b-a$ を持つことが利用されているはずです．ということは，$[a,\infty)$ における広義積分の場合には，この部分の議論を破綻させるような反例があり得るのではないか.「具体例の考察」と「一般的推論による考察」を往復しながら考えるわけです．初めは苦しいと思いますが，そういう体力を少しずつ付けていこう.

解答例

正しくない．反例が存在することを説明する.

まず $[0,\infty)$ 上の有界な連続関数 φ で，$[0,\infty)$ 全体で $\varphi\ge 0$ であり，さらに広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$ が（有限値として）存在し，その値 C が $C>0$ を満たすようなものをとる．たとえば $\varphi(x)=1/(x+1)^2$ とすればよいが，以降では φ の具体的な形は用いない．$\displaystyle\sup_{x\in[0,\infty)}\varphi(x)=M$ とおく.

区間 $[0,\infty)$ 上の関数列 $\{f_n\}$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

により定義する．すると各 f_n は連続で，$\displaystyle\sup_{x\in[0,\infty)}f_n(x)=M/n$ だから，$f_n\ge 0$ であることと合わせて，関数列 $\{f_n\}$ は定数関数 0 に一様収束することがわかる．ところが，任意の n に対して

$$\int_0^R f_n(x)\,dx=\frac{1}{n}\int_0^R\varphi\left(\frac{x}{n}\right)dx=\frac{1}{n}\int_0^{R/n}\varphi(y)\cdot n\,dy=\int_0^{R/n}\varphi(y)\,dy\to C\quad(R\to\infty)$$

である．つまり，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ が存在しその値は C に等しい．ゆえに当然

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx=C\ (\neq 0)$$

であるが，一方で $\{f_n\}$ の一様収束極限である 0 について $\displaystyle\int_0^\infty 0\,dx=0$ である．したがって，問題に示された等式は，この場合成立していない.