§4 必修問題の解説

問題 4.A

次の（正項）級数が収束することを証明せよ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

コメント

正項級数なので，部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ からなる数列 $\{S_n\}$ は単調増加です．したがって，$\{S_n\}$ が上に有界であることを証明すればよいことになります．ある意味では，多くの人が，本質的には必要な不等式を導くことができていました．

しかし一方で，「証明すべきことは『部分和の有界性』なのだ」ということを正確に理解して記述している人はそんなにいなかった．「$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$」という「級数の和」が登場するような不等式を書いて「これが証明だ」としている人が多かったのですが，それは話の順序が違います．級数の和は，まだ存在するかどうかすらわかっていない．それが存在することを証明したいのであって，存在すら不確かな対象について不等式らしきものを書いてみても，厳密に言えば，それは論理的には意味がありません．

解答例

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は正項級数なので，部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ からなる数列 $\{S_n\}$ が上に有界であることを証明すればよい．

区間 $(0, \infty)$ 上で関数 $f(x) = 1/x^2$ は単調減少だから，積分の単調性により，任意の整数 $k \geq 2$ に対し

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\, dx$$

が成り立つ．したがって

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x^2}\, dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

これで示された．

問題 4.B

前問の級数の和を S とする．（和 S のことも $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ という記号で表す場合もある．）

$$1.6 < S < 1.7$$

を証明せよ．

コメント

多くの人がおおむね適切に証明できていました．方法はいろいろありますが，一番シンプルと考えられる方法の一つが以下に述べるようなものです．自分の方法と比較してみてください．

1 点，注意しておきたいことがあります．任意の n について「$A < S_n < B$」という不等式を証明した上で（ここで A, B は n によらない定数)，極限に移行して，「ここから $A < S < B$ が従う」と結論する人がかなり多く見られました．これは誤りであって，この議論でわかるのは「$A \leq S \leq B$」だけです（もう少し慎重に言えば，$\{S_n\}$ が単調増加であることまで考慮に入れれば $A < S$ であることはわかりますが，いずれにしても $S \leq B$ は従いません)．この誤りは本問ではそんなに致命的ではないですけれど，でも，極限に対する理解がちょっと甘いのではないかと感じさせるタイプの間違いです．

解答例

区間 $(0, \infty)$ 上で関数 $f(x) = 1/x^2$ は単調減少だから，積分の単調性により，任意の整数 $k \geq 2$ に対し

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\,dx \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

ゆえに部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ について

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \int_4^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \int_3^{n} \frac{1}{x^2}\,dx$$

という評価式が得られる．$n \to \infty$ における極限をとって

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \leq S \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx,$$

すなわち

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} \leq S \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}.$$

左辺は $1.611\cdots$，右辺は $1.694\cdots$ なので，$1.6 < S < 1.7$ であることがわかる．