2016 年度 線形代数学 B（木曜 1 限，担当：松本佳彦）期末試験

2017 年 2 月 9 日（木）1 限　試験時間 80 分

配布物：問題，解答用紙 1 枚（1 枚まで追加可），計算用紙 1 枚

以下の問題に答えよ．解答の順番は問わない．問題文中に「ベクトル空間」とあったら，それはすべて「実ベクトル空間」の意味である．なお，いずれの問題についても，解答の根拠となる説明や計算を与えること．

1. 次の行列 A を用いて，線形写像 $T_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって定める：
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$
T_A の像 $\mathrm{Im}(T_A)$ の次元を求めよ．また，$\mathrm{Im}(T_A)$ の基底を一組求めよ．

2. 次の対称行列 A を直交行列 P によって対角化せよ．（方法がわからない場合は，直交行列ではない正則行列 P によって対角化すれば部分点を与える．）
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. 実数を項とする数列 $\{\, a_n \,\}$ であって，
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \tag{$*$}$$
という漸化式を満たすものについて考える．そのような数列全体のなすベクトル空間を V とする：
$$V = \{\, \{\, a_n \,\} \mid \{\, a_n \,\} \text{ は実数を項とする数列で，漸化式 } (*) \text{ を満たす} \,\}.$$
ただし，和 $\{\, a_n \,\} + \{\, b_n \,\}$ とスカラー倍 $c\{\, a_n \,\}$ は，$\{\, a_n \,\} + \{\, b_n \,\} = \{\, a_n + b_n \}$, $c\{\, a_n \,\} = \{\, ca_n \}$ によって定義されている．
   (1) 数列 $\{\, 2^n \,\}$ と $\{\, n \cdot 2^n \,\}$ は V の基底である．この事実を用いて，漸化式 $(*)$ を満たし，初項と第 2 項が $a_1 = a_2 = 1$ で与えられる数列 $\{\, a_n \,\}$ について，a_n を n の式で表せ．
   (2) 数列 $\{\, 2^n \,\}$ と $\{\, n \cdot 2^n \,\}$ が V の基底になっていることを示せ．

4. V を，$\mathbb{R}$ を定義域とする実数値関数であって，無限回微分可能（C^∞ 級），かつ周期 2π を持つようなもの全体のなすベクトル空間とする（ただし，関数 f が周期 2π を持つというのは，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x + 2\pi) = f(x)$ であることを意味する）：
$$V = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は無限回微分可能で，周期 } 2\pi \text{ を持つ} \,\}.$$
さらに，V における内積を次式で定義する．
$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$
   (1) 任意の正の整数 m, n に対し，$\sin mx$ と $\cos nx$ が上で定義した内積に関して直交することを示せ．
   (2) 線形変換 $T\colon V \to V$ を $T(f) = f''$ によって定義する．この T について，任意の $f, g \in V$ に対し $(T(f), g) = (f, T(g))$ が成り立つことを示せ．（ヒント：部分積分法を用いよ．）

答案の返却について　数学資料室（全学教育推進機構実験棟 II 364 号室）にて，2 月 15 日（水）から 2 月 24 日（金）まで．学生証持参のこと．開室時間は次のとおり：月 10:00–15:45，火 8:30–17:15，水 11:30–18:15，木 8:30–17:15，金 14:15–17:15．ただし担当者が席を外していることもあります．