問題　次の微分方程式を考える：

$$f''(x) - 5f'(x) - 6f(x) = 0. \tag{$*$}$$

この微分方程式の解全体のなすベクトル空間を V とする．すなわち

$$V = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 無限回微分可能} \mid f \text{ は } (*) \text{ を満たす} \,\}.$$

(1) V 上の線形変換 $T\colon V \to V$ を $T(f) = f'$ によって定義する．
　　f_1 を初期条件 $f_1(0) = 1$, $f_1'(0) = 0$ を満たす $(*)$ の解，
　　f_2 を初期条件 $f_2(0) = 0$, $f_2'(0) = 1$ を満たす $(*)$ の解とする．
　すると f_1, f_2 は V の基底となるが，この基底 E に関する線形変換 T の表現行列を求めよ．

(2) 線形変換 T の固有値をすべて求めよ．

(3) 初期条件 $f(0) = -1$, $f'(0) = 8$ を満たす $(*)$ の解を求めよ．

解答例

(1)　$T(f_1) = \tilde{f}_1$, $T(f_2) = \tilde{f}_2$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_1(0) = f_1'(0) = 0, \quad \tilde{f}_1'(0) = f_1''(0) = 5f_1'(0) + 6f_1(0) = 5\cdot 0 + 6\cdot 1 = 6, \quad \therefore\ \tilde{f}_1 = 6f_2,\\
&\tilde{f}_2(0) = f_2'(0) = 1, \quad \tilde{f}_2'(0) = f_2''(0) = 5f_2'(0) + 6f_2(0) = 5\cdot 1 + 6\cdot 0 = 5, \quad \therefore\ \tilde{f}_1 = f_1 + 5f_2.
\end{aligned}$$

したがって求める表現行列を A とすれば

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

(2)　線形変換 T の固有多項式 $g_T(t)$ は

$$g_T(t) = g_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ -6 & t-5 \end{vmatrix} = t(t-5) - (-1)\cdot(-6) = t^2 - 5t - 6.$$

方程式 $g_T(t) = 0$ の解は $t = -1$, 6 で，いずれも実数だからこれらは両方とも T の固有値．

(3)　固有値 $\lambda = -1$ および $\lambda = 6$ の各々に属する固有ベクトルとして，$g_1(x) = e^{-x}$ および $g_2(x) = e^{6x}$ をとることができる．g_1, g_2 は一次独立であって，V の次元は 2 だから，g_1, g_2 は V の基底となる．

われわれが求めたいものは $f(0) = -1$, $f'(0) = 8$ を満たすような関数 $f \in V$ である．$g_1(x) = e^{-x}$, $g_2(x) = e^{6x}$ が V の基底であることから，f はある実数 c_1, c_2 を用いて

$$f(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{6x} \tag{$**$}$$

と表すことができる．あとは初期条件を用いて c_1, c_2 を具体的に決定すればよい．$(**)$ と $f(0) = -1$ より $c_1 + c_2 = -1$ で，また $(**)$ を微分して得られる $f'(x) = -c_1 e^{-x} + 6c_2 e^{6x}$ と $f'(0) = 8$ より $-c_1 + 6c_2 = 8$. これを解いて $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ だから

$$f(x) = -2e^{-x} + e^{6x}.$$