2016年度 線形代数学B（水曜3限，担当：松本佳彦）中間試験

2016年12月7日（水）3限　試験時間60分

配布物：問題，解答用紙1枚（1枚まで追加可），計算用紙1枚（追加可）

以下の問題に答えよ．解答の順番は問わない．

記号 $\mathbb{R}[x]_n$ は，実数を係数とする n 次以下の x の多項式全体のなすベクトル空間を表すものとする．

1.

(1)　n を0以上の任意の整数とするとき，次の W は $\mathbb{R}[x]_n$ の部分空間である．そのことを証明せよ．

$$W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n \mid f''(x) + xf'(x) - 4f(x) = 0 \,\}.$$

(2)　次の W は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．そのことを証明せよ．

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \right\}.$$

2.　次の行列 A を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -10 \\ 2 & 0 & 10 & 14 \\ -2 & 1 & -12 & 5 \end{bmatrix}.$$

(1)　行列 A の簡約化 B を求めよ．

(2)　線形写像 $T_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定義する．T_A の核 $\operatorname{Ker} T_A$ の基底を一組求めよ．

3.　次式で定義される線形写像 $T\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$ を考える．

$$T(f(x)) = f''(x) + 2f'(x).$$

(1)　$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $E = \{\, 1, x, x^2 \,\}$ と $\mathbb{R}[x]_1$ の基底 $F = \{\, 1, x \,\}$ について，T の基底 E, F に関する表現行列 A を求めよ．

(2)　$\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $E' = \{\, x^2, x + x^2, 1 + x + x^2 \,\}$ と $\mathbb{R}[x]_1$ の基底 $F = \{\, 2 - 4x, 1 - 3x \,\}$ について，T の基底 E', F' に関する表現行列 B を求めよ．

4.　実数を成分とする2つの $m \times n$ 行列 A, B に対して，$A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{y}$（ただし $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$）という形で表されるようなすべての $\mathbb{R}^m$ のベクトルからなる $\mathbb{R}^m$ の部分空間 W を考える．すなわち

$$W = \{\, A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \,\}.$$

(1)　$\operatorname{rank}(A+B) \leq \dim(W)$ を証明せよ．

(2)　$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ を証明せよ．

答案の返却について　数学資料室（全学教育推進機構実験棟II 364号室）にて，12月12日（月）から12月22日（木）まで．学生証持参のこと．開室時間は次のとおり：月 10:00–15:45，火 8:30–17:15，水 11:30–18:15，木 8:30–17:15，金 14:15–17:15.