2016 年度 線形代数学 B（水曜 3 限，担当：松本佳彦）期末試験

2017 年 2 月 8 日（水）3 限　試験時間 80 分

配布物：問題，解答用紙 1 枚（1 枚まで追加可），計算用紙 1 枚

以下の問題に答えよ．解答の順番は問わない．問題文中に「ベクトル空間」とあったら，それはすべて「実ベクトル空間」の意味である．なお，いずれの問題についても，解答の根拠となる説明や計算を与えること．

1. $\mathbb{R}^4$ に属する次の 3 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が一次独立であることを示せ．さらに，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を含む $\mathbb{R}^4$ の基底を一組与えよ．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. 次の対称行列 A を直交行列 P によって対角化せよ．（方法がわからない場合は，直交行列ではない正則行列 P によって対角化すれば部分点を与える．）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. $\mathbb{R}$ を定義域とする実数値関数であって，無限回微分可能（C^∞ 級），かつ微分方程式

$$f''(x) - 6f'(x) + 8f(x) = 0 \tag{$*$}$$

を満たすものについて考える．そのような関数全体のなすベクトル空間を V とする：

$$V = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は無限回微分可能で，微分方程式 } (*) \text{ を満たす} \,\}.$$

ただし，和 $f+g$ とスカラー倍 cf は，$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$ によって定義されている．

(1) V は 2 次元であり，$g_1(x) = e^{2x}$, $g_2(x) = e^{4x}$ が V の基底になっている．この事実を用いて，次の初期条件を満たすような微分方程式 $(*)$ の解 $f(x)$ を具体的に求めよ：

$$f(0) = -1, \qquad f'(0) = 3.$$

(2) V の基底として，次の初期条件を満たす微分方程式 $(*)$ の解 f_1, f_2 を選ぶこともできる：

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = 0; \qquad f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 1.$$

V 上の線形変換 $T\colon V \to V$ を $T(f) = f'$ によって定義する．T の基底 f_1, f_2 に関する表現行列 A を求めよ．また，T の固有値をすべて求めよ．

4. (1) 実数 a, b に対し，行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

によって定める．A が対角化可能であるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．

(2) 実数を成分とする 2 次正方行列 A, B に関する次の数学的主張が正しいか誤っているか答えよ．
「A, B がともに対角化可能であれば，積 AB も必ず対角化可能である．」

答案の返却について　数学資料室（全学教育推進機構実験棟 II 364 号室）にて，2 月 15 日（水）から 2 月 24 日（金）まで．学生証持参のこと．開室時間は次のとおり：月 10:00–15:45，火 8:30–17:15，水 11:30–18:15，木 8:30–17:15，金 14:15–17:15．ただし担当者が席を外していることもあります．